Wiskunde

Wiskunde

voor de eerste klas van het Gymnasium

Editie 2009

Barlaeus Pers

Amsterdam

Typografie: Jan de Ruijter met gebruik van LaTeX en LyX.
Omslagillustratie: Laurent de la Hire,
Allegorie van de Meetkunde (detail), 1649
Toledo Museum of Art, Toledo, Ohio, USA.
Omslagontwerp: Ferdi Visser
Printed by Haiway Printing Co., Ltd. CHINA

ISBN 978-90-78511-04-5

Verantwoording

Bij het schrijven van het materiaal voor de eerste klas hebben wij ons laten leiden door de volgende uitgangspunten en overwegingen:

-Wij willen de leerlingen aanspreken op hun creativiteit en abstractievermogen.

-Wij willen hen leren analytisch te denken en kritisch en nauwkeurig te zijn.

-Waar mogelijk de stof in historisch perspectief aanbieden, passend in het gymnasiale onderwijs.

-Hierbij willen wij gebruik maken van wat kinderen al weten: van de basisschool, uit andere vaklessen, vanuit verschillende culturen.

-Er moet voldoende gelegenheid tot oefenen en herhalen zijn.

-De stof moet een solide basis bieden voor de wiskunde in de bovenbouw.

- Er komen verschillende kanten van kennis en kennisverwerving aan bod¸namelijk:

1.Begrippen, definities en stellingen en ook afspraken binnen de wiskunde bestuderen en uit het hoofd leren.

2.Verschillende werkwijzen bestuderen en reproduceren.

3.Problemen kunnnen analyseren en aanpakken, en deze kennis weer bij de aanpak van nieuwe problemen kunnen gebruiken.

4.Uitleggen waarom de keuze voor een zekere werkwijze juist en/of geschikt is.

-Hoewel de verschillende onderwerpen in aparte hoofdstukken worden behandeld, moet de samenhang in de lessen en in de uitwerking van de opgaven blijken.

-Verder willen wij de leerlingen laten ervaren dat ze wiskunde kunnen leren door èn de klassikale uitleg van de docent goed te volgen, en deel te nemen aan de mogelijke discussies die hierbij ontstaan. Om daarna zelfstandig aan het werk te gaan, waarbij ze elkaar, zonodig, helpen.

-Door klassikale uitleg en gezamenlijke bespreking van opgaven en vragen uit de klas leren de leerlingen enerzijds beargumenteren wat ze doen en kunnen zij anderzijds waar nodig , bijgestuurd worden.

Wij hebben géén boek gemaakt om zelfstandig uit te werken! De leraar en de gesprekken tussen leerling en leraar en tussen leerlingen onderling blijven onmisbaar. Het is ook géén kant-en-klaar-boek voor de leraar. De leraar kan de tekst gebruiken, verduidelijken, en verrijken met eigen verhalen, materiaal, tekeningen en beelden. Of te wel (zie ook het vorige punt): de leraar geeft toelichting en voorbeelden, stelt vragen om te zien wat leerlingen al van het onderwerp weten, stimuleert leerlingen van alles te ontdekken, doet zonodig het één en ander vóór, legt uit en geeft hints.

Verder staan wij niet achter het vigerende model waarin te pas en te onpas de wiskunde zogenaamd contextrijk wordt aangeboden.
Wat willen we dat eersteklassers leren van elk hoofdstuk?

Hoofdstuk 1 Getallen
Enkele oude getalsystemen.
Zich realiseren hoe bijzonder het getal nul is.
Het gemak van ons tientallig stelsel inzien.
Begrijpen hoe het tweetallig stelsel en andere positiestelsels werken.
Gehele, gebroken en negatieve getallen plaatsen op een getallenlijn.
Een breuk als decimaal getal schrijven en omgekeerd.
Getallen opvatten als pijl op een getallenlijn.
Rekenen met positieve en negatieve (gehele en gebroken) getallen.
Weten wat priemgetallen, delers en priemfactoren zijn.
Kennismaken met enkele vondsten over getallen in de geschiedenis van de wiskunde.
De wiskundige terminologie bij het optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen kennen.
GGD en KGV van twee getallen berekenen.
Het verworven getalinzicht toepassen in uiteenlopende getallenraadsels, -puzzels, opgaven uit verschillende Kangoeroe-wedstrijden.
Hoofdstuk 2 Meetkundige Constructies
De vlakke meetkunde-taal en bijbehorende tekens.
Een (wiskundige) tekst nauwkeurig lezen en begrijpen.
Precies tekenen.
Kennismaken met construeren met passer en rechte als belangrijk deel van de geschiedenis van de meetkunde/wiskunde en daarmee voorbereiden op het formele redeneren en bewijzen.
Formuleren en beschrijven wat je gedaan hebt.
Bijzondere lijnen in driehoeken construeren en de om- en ingeschreven cirkel van een driehoek.
Hoeken tekenen en meten met behulp van een gradenboog.
Regelmatige veelhoeken construeren en/of tekenen.
Kennismaken met de Gulden Snede verhouding.
Door enkele bijzondere constructies de behoeft om aan te tonen dat het ook echt klopt.
Hoofdstuk 3 Algebra
De rekenregels, die tot nu toe zijn gebruikt (op de basisschool en in hoofdstuk 1 Getallen), kunnen formuleren.
Kennismaken met het begrip variabele.
Herleiden van formules met variabelen, inclusief formules in breukvorm en formules met machten.

Hoofdstuk 4 Meten en Berekenen
Hoeken meten en tekenen met de geodriehoek.
Bijzondere driehoeken.
Bijzondere lijnen in driehoeken.
Bijzondere vierhoeken.
Verschillende vormen van symmetrie.
Symmetrie-eigenschappen van figuren.
De begrippen noodzakelijk en voldoende.
Berekeningen met hoeken in een driehoek.
Hoofdstuk 5 Het Assenstelsel
Kennismaken met het assenstelsel: x-as en y-as, coördinaten
Tekenen van meetkundige figuren m.b.v. coördinaten.
Noteren van alle punten op een horizontale resp. verticale lijn met $y = c$ en $x = c$.
Verbanden tussen x en y in een tabel en in een formule weergeven.
Bij een lineaire formule een tabel maken en de grafiek tekenen.
Uit een tabel en uit een grafiek een lineaire formule afleiden.
Een vlakdeel tekenen bij een lineaire ongelijkheid.
Kennismaking met eenvoudige kwadratische formules.
Uitrekenen van y bij gegeven x.
Uitvinden wat x is bij gegeven y (informeel oplossen van een vergelijking).
In het assenstelsel spiegelen in een lijn en in een punt.
Formules gebruiken bij het omzetten in een andere eenheid, bijv. graden Fahrenheit in Celsius.
Formules gebruiken bij het oplossen van raadsels/problemen.
Hoofdstuk 6 Algebra vervolg
Herhaling van de algebra van hoofdstuk 3.
Herleiden van producten van tweetermen.
Variabelen gebruiken bij het verklaren van uiteenlopende getallenraadsels, -puzzels, en bij opgaven uit verschillende Kangoeroe-wedstrijden.

Wij willen Daan Jansen, Michel van Meer, Laura Hak en Dain de Kramer danken voor hun hulp bij het tot stand komen van dit boek.
De schoolleiding van het Barlaeus Gymnasium danken wij voor de ondersteuning van dit project.

De samenstellers / auteurs

JanWillem Aalberts
Nora Blom
Benjamin del Canho
Lennaert Huiszoon
Patrick Kromowirjo
Jan de Ruijter
Ferdi Visser
Bart Zevenhek

Amsterdam, voorjaar 2007

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Getallen

1.1 Van de één naar de nul

Zoals woorden worden gebruikt om verschillende voorwerpen en gevoelens te beschrijven, zo helpen getallen ons om onderscheid te maken tussen verschillende aantallen. In het dagelijks leven maken we gebruik van een decimaal (tientallig) positiestelsel, maar er zijn in de loop der eeuwen vele andere manieren geweest om de getallen op schrift van elkaar te onderscheiden.

Dat de meeste mensen bij voorkeur rekenen in het tientallig stelsel heeft vermoedelijk te maken met onze vingers. Om het aantal schapen in zijn kudde te tellen, gebruikte een herder vroeger allicht dezelfde methode als je nu nog vaak ziet bij kinderen die net leren rekenen: na ieder geteld object wordt opnieuw een vinger uitgeklapt. Overigens zijn er ook andere methoden om de telling te ondersteunen. De Engelsen gebruikten hun vingerkootjes, waardoor zij tot ver in de twintigste eeuw twaalf shillings voor een pond betaalden en er twaalf inches in een voet gaan.

De leraar zal het een en ander vertellen over het eerste gebruik van getallen, het belang van de nul en het positiestelsel.

Een bekend voorbeeld van een ander talstelsel zijn de Romeinse cijfers. Het bouwjaar van menig historisch pand is met kennis van deze cijfers van de gevel af te lezen en nog steeds worden de eigen producties van de BBC (British Broadcasting Corporation) gedateerd in het Romeinse schrift.

De meest gebruikte Romeinse cijfersymbolen zijn:

- I voor de 1 in ons tientallig positiestelsel
- V voor 5
- X voor 10
- L voor 50
- C voor 100
- D voor 500
- M voor 1000.

De cijfers moeten bij elkaar worden opgeteld, indien ze van hoog naar laag gerangschikt zijn:

CXII staat voor $100 + 10 + 1 + 1 = 112$

Als een lager cijfer voor een hoger cijfer staat geschreven, moet het lagere cijfer van het hogere worden afgetrokken:

IV staat voor $5 - 1 = 4$

Dus:

MCMLXXIX betekent $1000 + (1000 - 100) + 50 + 10 + 10 + (10 - 1) = 1979$

Het is gebruik om niet meer dan drie dezelfde Romeinse lettersymbolen achter elkaar te zetten: zo wordt 40 niet geschreven als XXXX maar als XL.

Om grote getallen aan te geven zijn de Romeinse cijfers niet handig. De problemen kunnen met kunstgrepen nog worden opgelost. Bijvoorbeeld een D met een streep erboven werd gebruikt voor 5.000. Maar om nog grotere getallen te beschrijven moet telkens een nieuwe truc of een nieuw symbool worden verzonnen. Uiteindelijk zijn er zo veel trucs en symbolen, dat je er hoorndol van wordt.

Opgave 1 Als je probeert met Romeinse cijfers te rekenen kom je voor problemen te staan. Probeer het maar eens; bereken alles op zijn 'Romeins'. Schrijf al je tussenstappen op en controleer je antwoord decimaal. Bijvoorbeeld:

CX − LXXI = LXXXXXVIIIII − LXXI =

XXXVIIII = XXXIX

of:

L	XXXXX	V	IIII	
L	XX		I	−
	XXX	V	IIII	= XXXIX

Controle in het decimaal stelsel: 110 − 71 = 39, klopt!

a) CCLXIV + LXXVII c) MDCXXVIII − CCCXLI

b) CDLXXVI + MCCXLIII d) X × CLXXXIV

Het rekenen met Romeinse cijfers is vrijwel ondoenlijk. De Romeinen deden dat dan ook niet. Om berekeningen te maken gebruikten ze een “abacus”, een soort telraam. De eenvoudigste vorm is een aantal lijntjes in het zand, met daarop steentjes die verplaatst worden. Maar er waren ook exemplaren van brons met schuifjes. (zie afbeelding)

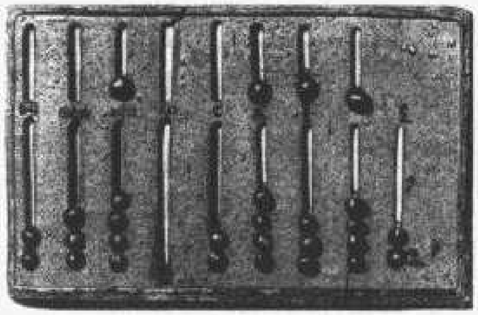


FIG. 16.94. *Roman "pocket abacus" (in bronze), beginning of Common Era. (Cabinet des médailles, Bibliothèque nationale, Paris.) (br. 1925)*

Misschien heb je al iets gehoord over de getallen van de Maya’s, de Chinezen of de Babyloniërs? Deze laatsten gebruikten een zestigtallig stelsel, maar zij hadden toch nog geen teken voor de nul.

Het waren de Indiërs die met een oplossing voor de problemen kwamen: de nul deed zijn intrede.

Met de nul is het mogelijk om aan gelijke symbolen verschillende betekenis te geven. Zo is de eerste vijf in het getal 559 tien keer zo veel waard als de tweede vijf en de 2 in 2000 honderd keer zoveel als de 2 in 20. Zonder de nul kan dit onderscheid moeilijk gemaakt worden. Om in een tientallig stelsel alle verschillende getallen een eigen "naam" te geven, zijn tien symbolen nodig. Wij gebruiken daarvoor de cijfers 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 en 0. Ons decimale stelsel is een positiestelsel, omdat de positie van het cijfer in het getal de waarde van het cijfer bepaalt. Het cijfer op:

- de eerste positie van rechts geeft het aantal eenheden,
- de tweede positie van rechts geeft het aantal tientallen,
- de derde positie van rechts geeft het aantal honderdtallen (10×10),
- de vierde positie van rechts geeft het aantal duizendtallen ($10 \times 10 \times 10$), enz.

  $4077 = 7 \times 1 + 7 \times 10 + 0 \times 10 \times 10 + 4 \times 10 \times 10 \times 10 = 7 + 70 + 0 + 4000$

Om ook getallen te kunnen lezen, die veel posities innemen, wordt gebruik gemaakt van machten van 10:

$$4077 = 7 \times 1 + 7 \times 10^1 + 0 \times 10^2 + 4 \times 10^3$$

Je ziet:

$$10^3 \text{ betekent } 10 \times 10 \times 10$$

Evenzo is $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$. Spreek uit: twee tot de vijfde macht, of kortweg: twee tot de vijfde.

Opgave 2 Geef van elk cijfer in onderstaande getallen aan wat het betekent. Doe dit van rechts naar links en schrijf het ook met machten van 10. Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 51.056 &= 6 \times 1 + 5 \times 10 + 0 \times 100 + 1 \times 1.000 + 5 \times 10.000 \\ &= 6 \times 1 + 5 \times 10^1 + 0 \times 10^2 + 1 \times 10^3 + 5 \times 10^4 \end{aligned}$$

a) 103 b) 9.010 c) 23.431.007

Tot besluit van deze paragraaf een kennismaking met het binaire (tweetallig) positiestelsel. Het binaire stelsel is de taal waarin computers communiceren, de taal van de nullen en de enen. Om getallen te kunnen onderscheiden zijn er twee cijfersymbolen nodig, bijvoorbeeld 0 en 1.

Natuurlijk kun je nog andere talstelsels maken: drietallig met alleen 0, 1 en 2, viertallig met 0, 1, 2 en 3, enz.

Opgave 3 Op de volgende bladzijde zie je een tabel met daarin de getallen 0 tot en met 32 in de decimale schrijfwijze. Van een aantal van die getallen is de vijftallige, binaire, octale en hexadecimale schrijfwijze al gegeven. Vul de rest van de tabel zelf in: doe het met potlood!

Vijftallig	Decimaal *(10-tallig)*	Binair *(2-tallig)*	Octaal *(8-tallig)*	Hexadecimaal *(16-tallig)*
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	10	2	2
3	3	11	3	3
4	4	100	4	4
10	5	101	5	5
11	6		6	6
12	7		7	7
13	8	1000	10	8
14	9		11	9
20	10		12	A
21	11			B
22	12			C
23	13			D
24	14			E
30	15			F
31	16	10000	20	10
32	17			11
33	18			12
	19			
	20			
	21			
	22			
	23			
	24			
100	25			
	26			
	27			
	28			
	29			
	30			1E
	31			1F
	32	100000		20

Van één tot tien tellen in het binaire stelsel gaat als volgt:

1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010

Om te controleren of dit laatste getal inderdaad net zo groot is als 'onze' tien, moet het getal per positie worden ontleed, weer vanaf rechts:

$$1010 \text{ binair} = 0 \times 1 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 0 + 2 + 0 + 8,$$

en dat is inderdaad gelijk aan tien.

VOORBEELD

$100111 \text{ binair} = 1 \times 1 + 1 \times 2^1 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^3 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^5 = 39$

Opgave 4 Geef van elk cijfer in onderstaande getallen aan wat het betekent in het binaire talstelsel. Doe dit van rechts naar links en schrijf machten van 2 op. Schrijf binaire getallen steeds in een andere kleur!

- 10101 (bin)
- 100001 (bin)
- 11111 (bin)

Om een decimaal getal om te rekenen naar een binair getal is enige kennis van de machten van twee gewenst (let op, nu vanaf links gerekend):

$91 = 1 \times 64 + 0 \times 32 + 1 \times 16 + 1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1 \times 1 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 1 \times 1$

Dus 91 (tientallig) is gelijk aan het binaire getal 1011011.

Opgave 5 Schrijf alle machten van 2 op vanaf $2^1 = 2$ tot en met $2^{10} = 1024$ en leer ze uit je hoofd.

Opgave 6 Geef de decimale schrijfwijze van onderstaande binaire getallen:

a) 1000 b) 11 c) 1100110 d) $10\frac{10}{11}$

Opgave 7 Schrijf onderstaande getallen als binair getal. Voorbeeld:

$81 = 64 + 16 + 1 = 2^6 + 2^4 + 1 = 1010001$ binair

a) 21 b) 100 c) 256

Opgave 8

a) Schrijf als binair getal: 11, 22, 44 en 88.

b) Hoe kun je aan een binair getal zien of het even of oneven is?

c) Hoe kun je aan een binair getal zien dat het deelbaar is door acht?

Binair rekenen is eenvoudig, veel eenvoudiger dan het rekenen met Romeinse cijfers! Om op te kunnen tellen, hoef je enkel te weten dat $0+1$ gelijk is aan 1 en $1+1$ aan 10. Ook vermenigvuldigen is een stuk makkelijker dan in het tientallig stelsel. Je hoeft slechts de tafels van 1 ($1 \times 1 = 1$ en $10 \times 1 = 10$) en 10 ($1 \times 10 = 10$ en $10 \times 10 = 100$) te kennen!

VOORBEELD

Bereken 23×12 in het binaire stelsel en controleer het antwoord:
$23 = 16 + 4 + 2 + 1$ is binair 10111 en $12 = 8 + 4$ is binair 1100, dus

$$\begin{array}{rl} 10111 & \\ 1100 & \times \\ \hline 1011100 & \\ 10111000 & + \\ \hline 100010100 & \end{array}$$

En 100010100 binair is gelijk aan $256 + 16 + 4 = 276 = 23 \times 12$, dus het klopt.

Schrijf de binaire getallen steeds in een andere kleur om ze goed te kunnen onderscheiden van de decimale getallen!

Opgave 9

a) Bereken onderstaande binaire sommen, schrijf het antwoord binair op.

- $11 + 11$
- $1011 + 11111$

b) Controleer de sommen in het decimale stelsel.

Opgave 10

a) Bereken onderstaande binaire producten.

- 11×11
- 1011×11111

b) Controleer de producten in het decimale stelsel.

In een computer worden alle gegevens opgeslagen in de vorm van *ladingen*. Hierbij zijn maar twee mogelijkheden: *wel* of *geen* lading. Geen lading noemen we nul en wel lading één. Zo kun je zeggen dat een computer werkt met een tweetallig of binair stelsel. De taal van de computer bestaat uit rijtjes nullen en enen zoals 111010111 of 0001101010100. De nullen en enen heten de bits, dat is een afkorting van binary digits (digit = cijfer). Een rijtje van acht bits, bijv. 10101101, heet een byte. Rijtjes van veel nullen en enen zijn onoverzichtelijk.

Bij het werken met computers worden daarom ook andere talstelsels gebruikt: het octale of achttallig stelsel en het hexadecimale of zestientallig stelsel.
Waarom juist deze stelsels?
Omdat 16 en 8 machten van 2 zijn ($8 = 2^3$en $16 = 2^4$), zijn getallen uit het binaire stelsel heel gemakkelijk om te zetten naar octale of hexadecimale equivalenten.

VOORBEELD: 10110010110

1. Verdeel het getal van rechts naar links in groepjes van drie: 010|110|010|110

2. Schrijf van ieder groepje het octale equivalent op:

010 = 2
110 = 6
010 = 2
110 = 6

3. 10110010110 binair = 2626 octaal

Het omzetten van binaire getallen naar hexadecimale getallen gaat net zo, maar dan met groepjes van 4.
Ook het omzetten van octaal of hexadecimaal naar binair gaat met deze methode heel gemakkelijk.

Opgave 11 Zet de volgende binaire getallen om naar octaal en naar hexadecimaal:

a) 110

b) 11011

c) 1010110

Hieronder staan de coderingen van de computer voor het alfabet, cijfers, en andere tekens, de zogenaamde *ASCII-code*. (ASCII is een afkorting van *American Standard Code for Information Interchange* en is een standaard om een aantal letters, cijfers en leestekens te representeren en aan ieder element in die reeks een binair geheel getal te koppelen, waarmee dat leesteken of die letter wordt aangeduid.)

Dec	Hx	Oct	Char	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr	Dec	Hx	Oct	Html	Chr
0	0	000	NUL (null)	32	20	040		Space	64	40	100	@	@	96	60	140	`	`
1	1	001	SOH (start of heading)	33	21	041	!	!	65	41	101	A	A	97	61	141	a	a
2	2	002	STX (start of text)	34	22	042	"	"	66	42	102	B	B	98	62	142	b	b
3	3	003	ETX (end of text)	35	23	043	#	#	67	43	103	C	C	99	63	143	c	c
4	4	004	EOT (end of transmission)	36	24	044	$	$	68	44	104	D	D	100	64	144	d	d
5	5	005	ENQ (enquiry)	37	25	045	%	%	69	45	105	E	E	101	65	145	e	e
6	6	006	ACK (acknowledge)	38	26	046	&	&	70	46	106	F	F	102	66	146	f	f
7	7	007	BEL (bell)	39	27	047	'	'	71	47	107	G	G	103	67	147	g	g
8	8	010	BS (backspace)	40	28	050	(	(	72	48	110	H	H	104	68	150	h	h
9	9	011	TAB (horizontal tab)	41	29	051	)	)	73	49	111	I	I	105	69	151	i	i
10	A	012	LF (NL line feed, new line)	42	2A	052	*	*	74	4A	112	J	J	106	6A	152	j	j
11	B	013	VT (vertical tab)	43	2B	053	+	+	75	4B	113	K	K	107	6B	153	k	k
12	C	014	FF (NP form feed, new page)	44	2C	054	,	,	76	4C	114	L	L	108	6C	154	l	l
13	D	015	CR (carriage return)	45	2D	055	-	-	77	4D	115	M	M	109	6D	155	m	m
14	E	016	SO (shift out)	46	2E	056	.	.	78	4E	116	N	N	110	6E	156	n	n
15	F	017	SI (shift in)	47	2F	057	/	/	79	4F	117	O	O	111	6F	157	o	o
16	10	020	DLE (data link escape)	48	30	060	0	0	80	50	120	P	P	112	70	160	p	p
17	11	021	DC1 (device control 1)	49	31	061	1	1	81	51	121	Q	Q	113	71	161	q	q
18	12	022	DC2 (device control 2)	50	32	062	2	2	82	52	122	R	R	114	72	162	r	r
19	13	023	DC3 (device control 3)	51	33	063	3	3	83	53	123	S	S	115	73	163	s	s
20	14	024	DC4 (device control 4)	52	34	064	4	4	84	54	124	T	T	116	74	164	t	t
21	15	025	NAK (negative acknowledge)	53	35	065	5	5	85	55	125	U	U	117	75	165	u	u
22	16	026	SYN (synchronous idle)	54	36	066	6	6	86	56	126	V	V	118	76	166	v	v
23	17	027	ETB (end of trans. block)	55	37	067	7	7	87	57	127	W	W	119	77	167	w	w
24	18	030	CAN (cancel)	56	38	070	8	8	88	58	130	X	X	120	78	170	x	x
25	19	031	EM (end of medium)	57	39	071	9	9	89	59	131	Y	Y	121	79	171	y	y
26	1A	032	SUB (substitute)	58	3A	072	:	:	90	5A	132	Z	Z	122	7A	172	z	z
27	1B	033	ESC (escape)	59	3B	073	;	;	91	5B	133	[	[	123	7B	173	{	{
28	1C	034	FS (file separator)	60	3C	074	<	<	92	5C	134	\	\	124	7C	174			|
29	1D	035	GS (group separator)	61	3D	075	=	=	93	5D	135	]	]	125	7D	175	}	}
30	1E	036	RS (record separator)	62	3E	076	>	>	94	5E	136	^	^	126	7E	176	~	~
31	1F	037	US (unit separator)	63	3F	077	?	?	95	5F	137	_	_	127	7F	177	&#127;	DEL

Source: www.LookupTables.com

Opgave 12 Schrijf onderstaande getallen in het achttallig stelsel. Voorbeeld:

$$81_{dec} = 1 \times 64 + 2 \times 8 + 1 = 1 \times 8^2 + 2 \times 8^1 + 1 = 121_{oct}$$

a) 21 b) 100 c) 256

Opgave 13 Het product 11 × 11 ziet er in het achttallig stelsel bijna net zo uit als in het tweetallig stelsel

$$\begin{array}{r} 11 \\ 11\ \times \\ \hline 11 \\ 110\ + \\ \hline 121 \end{array}$$

De controle met octale getallen is echter geheel anders, want 11(octaal) = 1 × 8 + 1(decimaal) = 9 en 121 (octaal) = 1 × 8² + 2 × 8 + 1(decimaal) = 81. Het klopt want het decimale product 9 × 9 = 81.

a) Bereken de octale som 10 + 110 en controleer dit decimaal.

b) Bereken het octale product 10 × 110 en controleer dit decimaal.

Opgave 14 Controleer bij enkele tekens uit het schema met de ASCII-codes of de decimale schrijfwijze overeen komt met de octale en de hexadecimale schrijfwijze.

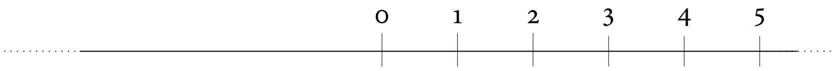
Bijvoorbeeld:

P	=	1010000	binair
	=	120	octaal
	=	80	decimaal
	=	50	hexadecimaal

Klopt dat met elkaar?

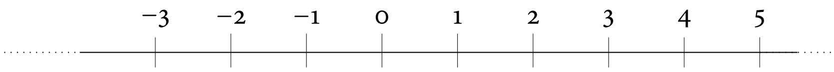
1.2 De Getallenlijn

We gaan getallen 0, 1, 2, 3 ..... bij punten op een rechte lijn zetten. Die lijn noemen we de **getallenlijn**.



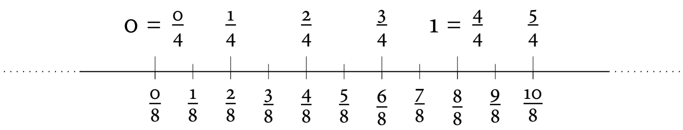
Figuur 1.0

Deze getallen, die jullie allemaal kennen, heten de **natuurlijke getallen**. We kunnen deze getallen uitbreiden naar links op de getallenlijn met de negatieve getallen. Negatieve getallen beginnen altijd met een min-teken. De negatieve getallen en de natuurlijke getallen samen heten de **gehele getallen**. We hebben in figuur 1.1 nu de volgende getallenlijn.



Figuur 1.1

Laten we eens het stukje van de getallenlijn gelegen tussen 0 en 1 onder de loep nemen. Verdeel dit stukje nu in bijvoorbeeld vier gelijke stukken. Bij de daarbij horende drie punten horen ook weer getallen die we schrijven als b.v. $\frac{3}{4}$ (zie figuur 1.2, waarin ook nog eens onder het figuurtje hetzelfde is gedaan maar nu met een verdeling in acht gelijke stukken). Zo'n getal heet een **gebroken getal** of ook **breuk**. Het getal boven de (breuk-)streep heet de **teller** en onder de streep heet de **noemer** van de breuk. Een noemer kan niet 0 zijn, maar de teller wel!



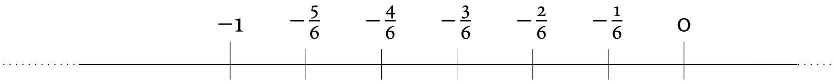
Figuur 1.2

Opgave 15 Welke getallen hebben dezelfde positie op de getallenlijn?

a) $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{8}, \frac{6}{9}, \frac{8}{10}, \frac{9}{12}, \frac{12}{15}, \frac{16}{20}, \frac{18}{24}$

b) $0, 1, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}$

Als we het zelfde recept toepassen voor alle mogelijke verdelingen, dan hebben we alle breuken, tussen 0 en 1 een plaatsje op de getallenlijn gegeven. Op dezelfde manier kunnen we tussen 2 en 3 verdergaan en geven dan breuken zoals $2\frac{3}{7}$ en $2\frac{357}{599}$, en noem maar op, een plaatsje. En zo doorgaand, uiteraard ook tussen de negatieve getallen, heeft elk geheel getal en elke breuk een plaats gekregen op de *getallenlijn*. Zie voor een aantal negatieve getallen op de getallenlijn figuur 1.3.



Figuur 1.3

Je ziet in figuur 1.2 ook dat $0 = \frac{0}{4} = \frac{0}{8}$, $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$, $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$, $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$ en $\frac{4}{4} = \frac{8}{8} = 1$. Trouwens we schrijven de gehele getallen ook wel eens als breuk met noemer 1. Dus bijvoorbeeld $25 = \frac{25}{1}$.

Als je een breuk groter dan 1 of kleiner dan −1 op de getallenlijn wilt plaatsen, is het handig eerst de helen eruit te halen. Bijvoorbeeld: $-\frac{22}{7} = -3\frac{1}{7}$. Dus $-\frac{22}{7}$ staat net links van de −3 op de getallenlijn.
$3\frac{1}{7}$ wordt een **samengestelde breuk** genoemd.

Opgave 16 Zet in de juiste volgorde op de getallenlijn en leg je antwoord uit:

a) $\frac{1}{12}$ en $\frac{3}{8}$
b) $-\frac{6}{3}$ en $-\frac{7}{4}$
c) $\frac{39}{20}$ en $\frac{59}{30}$
d) $-\frac{12}{25}$ en $-\frac{18}{35}$

Opgave 17 Zet in de juiste volgorde op de getallenlijn.

a) $0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{3}{5}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{1}, \frac{4}{7}$
b) $2, 3, \frac{5}{2}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}, \frac{11}{4}, \frac{13}{5}, \frac{14}{5}, \frac{25}{7}$
c) $-1, -2, -\frac{12}{5}, -\frac{23}{10}, -\frac{37}{15}, -\frac{58}{25}$

Sommige gebroken getallen kunnen worden geschreven als “kommagetallen”.
bijvoorbeeld: $\frac{2}{10} = 0,2$ of $\frac{45}{100} = 0,45$
In het algemeen kunnen gebroken getallen met in de noemer een macht van 10 worden geschreven als decimale gebroken getallen, en deze worden ook wel “kommagetallen” genoemd.

1.3 Rekenen met pijlen

1.3.1 Het optellen van pijlen

Je weet nu wat de *getallenlijn* is en dat 0 noch positief noch negatief is. We zullen nu een soort rekenen met pijlen gaan invoeren. We spreken af dat bij elk getal (positief, negatief of nul) een pijl (met deze lengte) hoort. Als het getal positief is wijst de pijl naar rechts en als het getal negatief is wijst de pijl naar links. Bij het getal 0 hoort een 'gekke pijl', n.l. eentje die een lengte 0 heeft en voor te stellen is door een punt.

VOORBEELD
Bij -5 hoort een pijl met lengte 5 die naar links wijst.

NB: Natuurlijk doen alle positieve en negatieve gebroken getallen en bijbehorende pijlen ook mee, maar in de uitleg en de voorbeelden zullen voornamelijk gehele getallen worden gebruikt.

In de wiskunde gebruiken we het teken "=" om aan te geven dat wat links van "=" staat hetzelfde is, of dezelfde waarde heeft, als wat rechts van "=" staat. Dat het woord "is" beslist niet hetzelfde is als het wiskundige teken "=" zal uit het volgende voorbeeld blijken.

VOORBEELD
$2 + 3 + 5 = 10$, heel flauw, maar wel waar. Eigenlijk staat er $10 = 10$.

Ook is waar:

$2 + 3 + 5 = 5 + 5 = 10$. Je hebt, heel juist, $2 + 3$ in de tweede stap vervangen door 5.

Maar echt onzin is:

$2 + 3 + 5 + 7 = \mathbf{5} + \mathbf{5} = \mathbf{10} + \mathbf{7} = 17$. Helaas is dit een veel gemaakte fout.

Misschien zeg je nu, ja maar het is toch 17? Dat komt dan, omdat je misschien de volgende zinnetjes door je hoofd laat gaan: 2 plus 3 is 5, en 5 plus 5 is 10, en 10 plus 7 is dus 17. Keurig uitgerekend, alleen helemaal fout opgeschreven, want neem maar eens het vetgedrukte gedeelte uit deze rekenkundige bewering. Daar staat letterlijk:

$5 + 5 = 10 + 7$

Het staat er echt. Je beweert dan dat $5 + 5$ dezelfde uitkomst heeft als $10 + 7$. We weten wel beter!

Dus, als je in gewoon Nederlands iets wilt uitleggen gebruik dan niet in plaats van het woordje “is” het teken “=”, en schrijf ook omgekeerd in een rekenkundige uitdrukking nooit het woordje “is”, ook al bedoel je braaf “=”. Schrijf nooit 5 + 2 is 7.

Opgave 18 Schrijf de berekening met tussenstappen op.

a) $1+2+3+4+5+6+7+8+9=$

b) $13+862+138+987=$

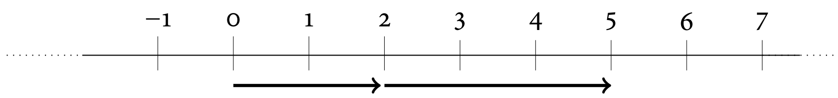
De **tegengestelde pijl** van een pijl krijg je door de pijl om te draaien. Als je dat vertaalt in getallen dan moet het tegengestelde van 3 wel -3 zijn en moet het tegengestelde van -3 wel 3 zijn.

Om het tegengestelde van een getal aan te duiden zetten we er een “$-$” teken voor. Lekker verwarrend. Want een minteken kan nu betekenen “negatief” of “tegengestelde” of “aftrekking”.

Voor het tegengestelde van -3 kunnen we $--3$ schrijven en het tegengestelde van -3 is 3. Dus $--3=3$!

Het tegengestelde van 0 is weer 0.

Kijk naar figuur 1.4.



Figuur 1.4

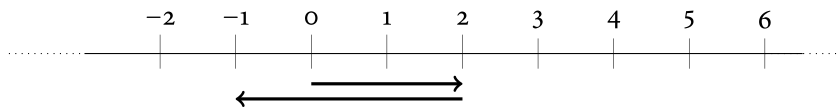
De pijl met lengte 3 is achter de pijl met lengte 2 gelegd en wijst nu naar 5. Dat bedoelen we met pijlen bij elkaar optellen. Een uitdrukking als $2+3=5$ zullen we lezen als:

> *Teken vanuit 0 op de getallenlijn een pijl met lengte 2 naar rechts, “gevolgd door” (dit is de +) een pijl met lengte 3 naar rechts, deze wijst naar 5.*

Merk op dat het optellen van deze pijlen precies zo verloopt als het optellen van niet negatieve getallen! Inderdaad, precies zoals je al gewend bent.

We krijgen pas iets nieuws als we iets gaan bedenken voor het optellen van pijlen die zowel naar rechts als naar links mogen wijzen.

Kijk naar figuur 1.5.



Figuur 1.5

We houden vol dat het optellen van pijlen betekent dat we vanuit 0, de pijlen kop aan staart achter elkaar leggen langs de getallenlijn en kijken naar welk getal uiteindelijk wordt gewezen.

Als we dat doen moeten we in dit geval lezen: Leg een pijl met lengte 2 vanuit 0 neer, "gevolgd door" (d.w.z. +) een pijl met lengte 3 welke naar links wijst. Aangewezen wordt dan het getal -1. Vandaar:

- $2 + -3 = -1$

Met deze gedachtengang kun je ook het volgende begrijpen:

- $2 + 3 = 5$
- $2 + -3 = -1$
- $-2 + 3 = 1$
- $-2 + -3 = -5$

En in het bijzonder:

- $0 + 3 = 3$ en $3 + 0 = 3$
- $0 + -3 = -3$ en $-3 + 0 = -3$

We kunnen zo elk willekeurig gekozen tweetal pijlen bij elkaar optellen. En als we vanaf nu geen verschil meer maken tussen getallen en pijlen, kunnen we net zo goed zeggen dat we elk tweetal getallen bij elkaar kunnen optellen.

Opgave 19 Geef eerst een berekening met pijlen, neem dan de opgave over en zet het antwoord er achter.

a) $1 + 2$

b) $0 + -5$

c) $-3 + -2$

d) $-1 + \frac{4}{3}$

Opgave 20 Neem over en vul in:

a) $-12 + 3 = \ldots$ want de eerste pijl gaat van … naar …
en de tweede van … naar …

b) $-3 + 12 = \ldots$ want de eerste pijl gaat van … naar …
en de tweede van … naar …

c) $-3 + -12 = \ldots$ want de eerste pijl gaat van … naar …
en de tweede van … naar …

Opgave 21 Neem over en vul in:

a) $8 = 10 + \ldots$

b) $-\frac{3}{5} = -5 + \ldots$

c) $-\frac{3}{5} = 5 + \ldots$

d) $-2 + -4 = -4 + \ldots$

Opgave 22 Neem over en bereken (schrijf steeds de tussenstappen op!), denk aan het juist gebruik van het gelijkteken.

a) $-3 + 5 + -2$

b) $11 + -11 + -\frac{1}{2}$

c) $-1 + -1 + 1 + -1$

d) $1 + -5 + \frac{5}{6} + -\frac{1}{6}$

1.3.2 Het aftrekken van pijlen

De aftrekking van twee pijlen gaat als volgt: tel bij de 1^e pijl het tegengestelde van de 2^e pijl op. De aftrekking wordt aangegeven met het teken "–".

Voorbeeld

$2 - 3 = 2 + -3$ en van dit laatste weten we hoe we dit moeten uitrekenen, zie figuur 1.5:

$2 - 3 = 2 + -3 = -1$.

Met deze afspraak over wat "aftrekken" is, kun je de volgende berekeningen begrijpen:

- $2 - 3 = 2 + -3 = -1$
- $2 - -3 = 2 + 3 = 5$
- $-2 - 3 = -2 + -3 = -5$

- $-2 - -3 = -2 + 3 = 1$

Merk op dat de aftrekking eigenlijk een optelling is, namelijk *optellen met het tegengestelde van de tweede pijl*. We kunnen alles uitleggen aan de hand van de optelling, d.w.z. het achter elkaar leggen van pijlen. De aftrekking, de vermenigvuldiging en ook de deling zijn helemaal terug te voeren tot het optellen, dus het achterelkaar leggen van pijlen.

LET OP: *De volgorde waarin je twee getallen bij elkaar optelt doet er niet toe.* Kijk maar naar het volgende voorbeeld:

$$5 + 3 = 8 \text{ en } 3 + 5 = 8,$$

$$2 + -4 = -2 \text{ en } -4 + 2 = -2.$$

Maar *de volgorde waarin je twee getallen van elkaar aftrekt doet er WEL toe*. Kijk maar:

$$5 - 3 = 2, \text{ maar } 3 - 5 = -2,$$

$$2 - -4 = 2 + 4 = 6, \text{ maar } -4 - 2 = -4 + -2 = -6!$$

Opgave 23 Schrijf onderstaande aftrekkingen eerst als optelling en geef dan een berekening met pijlen.

a) $1 - 2 = 1 + -2 = \ldots$
b) $0 - -5 = \ldots$
c) $-3 - -2 = \ldots$
d) $-1 - \frac{4}{3} = \ldots$

Opgave 24 Neem over, bereken en vul in op de . . . :

a) $5 - 11 = \ldots$ want de eerste pijl gaat van . . . naar . . . en de tweede van . . . naar . . .
b) $-11 - 5 = \ldots$ want de eerste pijl gaat van . . . naar . . . en de tweede van . . . naar . . .
c) $-5 - -11 = \ldots$ want de eerste pijl gaat van . . . naar . . . en de tweede van . . . naar . . .

Opgave 25 Maak onderstaande sommen kloppend.

a) $8 = 10 - \ldots$
b) $-\frac{3}{5} = -5 - \ldots$

c) $-\frac{3}{5} = 5 - \ldots$
d) $-2 + -4 = -4 - \ldots$

Opgave 26 Bereken (geef steeds tussenstappen!).

a) $-3 - 5 + -2$
b) $11 - -11 + -\frac{1}{2}$
c) $-1 + -1 - 1 - -1$
d) $1 - -5 - \frac{5}{6} - \frac{1}{6}$

1.3.3 De vermenigvuldiging

We gaan nu afspreken wat we bedoelen met uitdrukkingen zoals 3×4, die we overigens de **vermenigvuldiging** van 3 met 4 zullen noemen. We spreken dit uit als *drie keer vier*.

3×4 betekent:

- maak de pijl die van 0 naar 4 wijst 3 keer zo lang.

Deze wijst vervolgens naar 12. De uitkomst van deze vermenigvuldiging is dus 12. Vandaar het resultaat: $3 \times 4 = 12$.

En als het eerste getal negatief is, zoals in -3×4, dan spreken we af:

- maak het tegengestelde van de pijl die van 0 naar 4 wijst 3 keer zo lang.

Dat betekent dat $-3 \times 4 = -12$ waar moet zijn.

Dus het eerste getal (pijl) in de vermenigvuldiging vertelt hoeveel langer of korter de tweede pijl moet worden én of je die pijl moet omdraaien of niet!

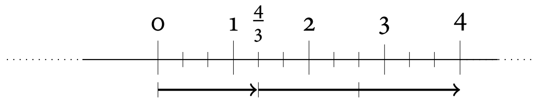
Als ook het tweede getal negatief is, dan geldt dezelfde afspraak.
-3×-4 betekent:

- maak het tegengestelde van de pijl die van 0 naar -4 wijst 3 keer zo lang.

Als je dit uittekent, zie je dat:
$-3 \times -4 = 12$!

Als het eerste getal van de vermenigvuldiging een breuk met teller 1 is, zoals in $\frac{1}{3} \times 4$, dan betekent dit volgens de bovenstaande afspraak:

- maak de pijl die van 0 naar 4 wijst $\frac{1}{3}$ keer zo lang. Resultaat: een pijl die naar $\frac{4}{3}$ wijst!



Figuur 1.6

Vandaar: $\frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$ en ook $-\frac{1}{3} \times 4 = -\frac{4}{3}$. Zie ook figuur 1.6. Je kunt nu gemakkelijk zelf bedenken waarom $0 \times 4 = 0$ en $4 \times 0 = 0$ is.

Hier is waarschijnlijk een verschil met wat je op de basisschool hebt gedaan: Bij een breuk groter dan 1 halen we in het algemeen NIET de helen eruit. We doen dat alleen als het handig is voor een berekening. We laten $\frac{4}{3}$ als antwoord staan en maken er meestal niet de samengestelde breuk $1\frac{1}{3}$ van. De afspraak dat we altijd vereenvoudigen blijft wel van kracht. Bijvoorbeeld $\frac{8}{6} = \frac{4}{3}$.

Later dit jaar krijg je algebra en breuken met letters, dan schrijven we nooit samengestelde breuken.

Wees er nogmaals op bedacht dat als we over pijlen spreken we net zo goed getallen hadden kunnen zeggen. Als we met gehele getallen bezig zijn kunnen we "vermenigvuldigen" ook opvatten als herhaald pijlen optellen.

$$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 \text{ en ook } 4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3$$

$$3 \times -4 = -4 + -4 + -4 = -12$$

$$-3 \times 4 = -4 + -4 + -4 = -12$$

$$-3 \times -4 = 4 + 4 + 4 = 12.$$

Vaak zullen we daarom zeggen dat het *vermenigvuldigen* herhaald *optellen* is.

Opgave 27 Geef bij onderstaande sommen een berekening met pijlen. Schrijf daarna de som over en zet het antwoord erachter. *Let op: het tweede getal beschouwen we steeds als de pijl, het eerste getal vertelt of de pijl wel of niet omgedraaid moet worden en hoeveel keer zo lang hij wordt.*

a) $2 \times \frac{2}{3}$

b) 5×-1

c) -1×5

d) -2×-4

e) $\frac{1}{4} \times \frac{4}{7}$

f) $-\frac{1}{5} \times 10$

Opgave 28 Neem over, bereken en vul in op de . . . :

a) $-7 \times 3 = \ldots$ want het tegengestelde van de pijl van 0 naar . . . wordt . . . keer zo lang

b) $11 \times -2 = \ldots$ want de pijl van 0 naar . . . wordt . . . keer zo lang

c) $-5 \times -6 = \ldots$ want het tegengestelde van de pijl van 0 naar . . . wordt . . . keer zo lang

Je begrijpt nu het volgende rijtje vermenigvuldigingen:

- $5 \times 7 = 35$
- $5 \times -7 = -35$
- $-5 \times 7 = -35$
- $-5 \times -7 = 35$

De vuistregel of het ezelsbruggetje dat je hieruit kunt afleiden is dat als je twee getallen met elkaar vermenigvuldigt, die hetzelfde teken hebben, de uitkomst positief is. En als de getallen in teken verschillen, de uitkomst negatief is. Voor het gemak zeggen we wel bij vermenigvuldigen:

- plus × plus is plus
- plus × min en ook min × plus is min
- min × min is plus

Dit is natuurlijk slordig taalgebruik, maar de goede verstaander weet wat je bedoelt. Merk op dat de volgorde van vermenigvuldigen er niet toe doet.

Kijk maar

$-3 \times 4 = -12$ en $4 \times -3 = -12$

Dus: $-3 \times 4 = 4 \times -3$.

Nog een voorbeeld

$-3 \times -4 = 12$ en $-4 \times -3 = 12$

Dus: $-3 \times -4 = -4 \times -3$.

Afspraak: *staan er haakjes in een berekening, bereken dan eerst de waarde van wat tussen haakjes staat. Ga dan pas verder!*

Ook geldt het volgende (reken het maar na):

$$3 \times (5 \times 4) = (3 \times 5) \times 4 = (3 \times 4) \times 5.$$

Als er meer dan twee getallen opgeteld of vermenigvuldigd moeten worden, mag je de volgorde zelf kiezen. Bijvoorbeeld:

$$\begin{array}{ll} 3+4+5 = 7+5 = 12 & \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 2 \times 5 = 10 \\ 3+4+5 = 3+9 = 12 & \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = \frac{1}{2} \times 20 = 10 \\ 3+4+5 = 8+4 = 12 & \frac{1}{2} \times 4 \times 5 = 2\frac{1}{2} \times 4 = 10 \end{array}$$

Maar pas op. als het gaat om optellen en vermenigvuldigen door elkaar, dan kan dit niet. Er is een vaste afspraak dat vermenigvuldigen vóór optellen gaat. Dit doen we straks in paragraaf 1.3.6.

Let op bij aftrekken. Als je er een optelling van maakt, kun je de volgorde weer zelf kiezen:

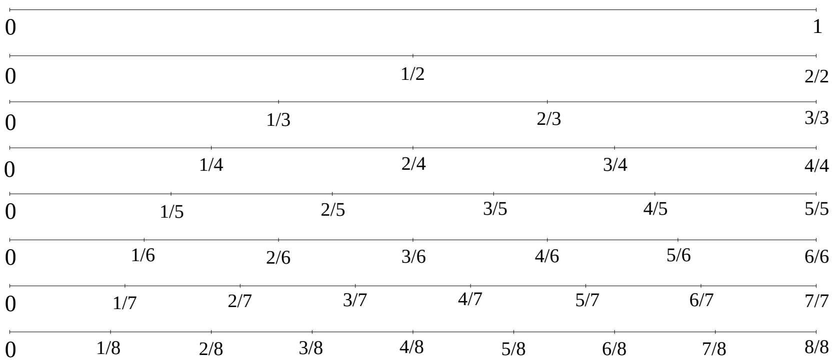
$$\begin{array}{l} 6-4-2 = \\ 6+-4+-2 = 2+-2 = 0 \\ 6+-4+-2 = 6+-6 = 0 \\ 6+-4+-2 = 4+-4 = 0 \end{array}$$

Opgave 29 Bereken en let bij de tussenstappen op het juiste gebruik van het gelijkteken. *(Doe het handig!)*

a) $-\frac{7}{91} + \frac{1}{2} - \frac{84}{91}$
b) $-25 \times 8 \times -\frac{1}{5}$
c) $11 \times -20 \times -5 \times -4$
d) $\frac{1}{5} \times 7 \times \frac{1}{11} \times 15 \times 22$
e) $\frac{1}{2} \times 20 \times 81 \times \frac{1}{10} \times \frac{1}{9}$

1.3.4 Optellen en vermenigvuldigen van breuken

Als je de teller en de noemer van een breuk met hetzelfde getal vermenigvuldigt, krijg je een andere schrijfwijze voor hetzelfde getal.



Figuur 1.7

Dat dit waar moet zijn, kun je begrijpen als je figuur 1.7 goed bestudeert. Je ziet daar bijvoorbeeld dat $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$. Je kunt een breuk op veel manieren schrijven.

Met deze regel kun je ook breuken vereenvoudigen. De afspraak is dat je een breuk altijd zo ver mogelijk vereenvoudigt.

Opgave 30 Schrijf onderstaande getallen met noemer 60.

Voorbeeld: $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{12}{60}$

a) 6 c) $1\frac{1}{5}$ e) 0

b) $-\frac{11}{15}$ d) $0,35$ f) $-1,1$

Opgave 31 Schrijf als breuk.

a) $7\frac{1}{7}$ c) $4,3$ e) $9,75$

b) $-4\frac{3}{10}$ d) $-8\frac{2}{3}$ f) $-2,111$

Opgave 32 Schrijf als breuk en/of vereenvoudig.

a) $\frac{15}{54}$ c) $\frac{42}{7000}$ e) $-3,15$

b) $-1,4$ d) $\frac{1470}{1875}$ f) $\frac{22}{222}$

We noemen twee breuken **gelijknamig** als ze dezelfde noemer hebben. Zoals we al eerder gezien hebben, is elk geheel getal op te vatten als breuk met noemer 1. Bijvoorbeeld $3 = \frac{3}{1}$.

Het volgende tweeregelige recept vertelt je hoe je twee breuken bij elkaar kunt optellen. Het voorbeeld helpt je de juistheid van deze regel in te zien.

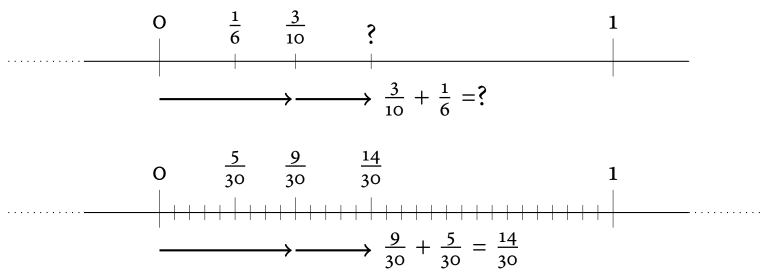
a) *Maak eerst de noemers gelijknamig. Dit wordt ook de noemer van de uitkomst.*

b) *Tel dan de tellers bij elkaar op. Zet deze nieuwe teller boven de nieuwe noemer.*

Voorbeeld

$\frac{3}{10} + \frac{1}{6} = \frac{9}{30} + \frac{5}{30} = \frac{14}{30} = \frac{7}{15}$

Dat dit waar is, kun je begrijpen door het volgende te bedenken. Heb je eenmaal het stukje getallenlijn tussen 0 en 1 in 30 gelijke stukken verdeeld en wijst er een pijl met een lengte van 9 van deze stukjes naar rechts gevolgd door nog een pijl die weer eens 5 stukjes lang is, dan wordt uiteindelijk naar het eind van het 14^{e} stukje gewezen. Zie figuur 1.8 hieronder.



Figuur 1.8

Je ziet dat je blij mag zijn dat je niet elke berekening in woorden hoeft te doen, maar dat we er een heel erg handige notatie en handige regels voor hebben.

Opgave 33 Neem over en bereken (Je hoeft geen pijlen te tekenen, maar noteer wel alle tussenstappen!).

a) $\frac{1}{3} + \frac{3}{7}$ c) $12\frac{1}{6} + 1\frac{1}{14}$ e) $\frac{14}{3} + \frac{3}{14}$

b) $2\frac{3}{4} + 3\frac{3}{8}$ d) $\frac{4}{3} + \frac{17}{3}$ f) $8\frac{2}{3} + 1\frac{5}{9}$

Opgave 34 Neem over en bereken (met tussenstappen!).

a) $-12\frac{3}{4} + 1\frac{1}{7}$ c) $-\frac{12}{7} - \frac{13}{14}$ e) $\frac{15}{4} + -\frac{5}{6}$

b) $\frac{123}{4} - 1\frac{1}{8}$ d) $-\frac{17}{3} - -\frac{1}{7}$ f) $-3\frac{2}{7} + 1\frac{3}{5}$

Opgave 35 Neem over en bereken (met tussenstappen!).

a) $\frac{117}{3} - -\frac{117}{4}$ c) $-\frac{1}{16} + \frac{1}{8} - -\frac{1}{32}$ e) $-\frac{3}{6} + \frac{1}{2}$

b) $-\frac{12}{72} + \frac{3}{8} + \frac{1}{9}$ d) $\frac{12}{17} - -\frac{1}{2}$ f) $\frac{18}{5} + \frac{18}{25}$

Opgave 36 Neem over en bereken (met tussenstappen!).

a) $-\frac{2}{3} + 1\frac{1}{4} - -\frac{3}{8}$ d) $12\frac{1}{10} + 3\frac{1}{5} - 1\frac{2}{15}$

b) $\frac{1}{2} - -\frac{2}{8} + -\frac{1}{3}$ e) $\frac{8}{9} + \frac{9}{8} - \frac{8}{8} + \frac{9}{9}$

c) $\frac{1}{6} + \frac{1}{3} - \frac{2}{6} - \frac{2}{12}$ f) $\frac{6}{11} - \frac{11}{6} + \frac{5}{11}$

Opgave 37 Neem over en bereken (met tussenstappen!).

a) $1,6 + 2\frac{2}{3}$ c) $-3\frac{2}{5} + 0,25$ e) $0,11 + -1\frac{49}{50}$

b) $0,25 - \frac{1}{3} + 0,5$ d) $-2\frac{6}{7} - 0,5$ f) $2,125 + 5\frac{3}{8}$

Voor het vermenigvuldigen van twee breuken zal de volgende regel blijken te gelden.

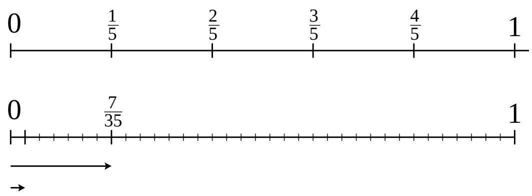
- $\frac{teller1}{noemer1} \times \frac{teller2}{noemer2} = \frac{teller1 \times teller2}{noemer1 \times noemer2}$

VOORBEELD

$\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$

Dat dit precies zo werkt, is als volgt in drie stappen te verklaren:

Stap 1. Om $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5}$ uit te rekenen moeten we volgens de uitleg bij figuur1.6. de pijl met lengte $\frac{1}{5}$ in 7 stukjes verdelen. Neem eerst eens het stuk op de getallenlijn tussen 0 en 1. Verdeel dit stuk in 35 gelijke stukken (zie figuur 1.9). Van de pijl met lengte $\frac{1}{5}$ kun je ook zeggen dat hij een lengte $\frac{7}{35}$ heeft. Daar weer het 7^e deel van nemen levert een pijl met lengte $\frac{1}{35}$ op. Vandaar dat $\frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$ waar is.



Figuur 1.9

Stap 2. $\frac{2}{7} = 2 \times \frac{1}{7}$ en $\frac{3}{5} = 3 \times \frac{1}{5}$.

Stap 3. Dus is $\frac{2}{7} \times \frac{3}{5} = 2 \times \frac{1}{7} \times 3 \times \frac{1}{5} = 2 \times 3 \times \frac{1}{7} \times \frac{1}{5} = 6 \times \frac{1}{35} = \frac{6}{35}$.

Elke keer, als je twee breuken met elkaar zou vermenigvuldigen, zou je zo kunnen laten zien dat de regel van teller maal teller en noemer maal noemer werkt.

LET OP:

- Bij vermenigvuldigen met samengestelde breuken, zoals bijvoorbeeld $2\frac{1}{3}$ en $3\frac{1}{7}$, maak je eerst breuken van deze getallen. Dus

$$2\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{7} = \frac{7}{3} \times \frac{22}{7} = \frac{22}{3}.$$

- Bij $-\frac{1}{4} \times -\frac{1}{7}$ bedenk je eerst of het antwoord positief of negatief is en dan ga je verder. Dus

$$-\frac{1}{4} \times -\frac{1}{7} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{28}.$$

  Zo ook bij

$$\frac{1}{4} \times -\frac{1}{7} = -\left(\frac{1}{4} \times \frac{1}{7}\right) = -\frac{1}{28}.$$

- Vereenvoudig de breuken altijd eerst, als dat kan! Zie bijvoorbeeld opgave 38c.

NB: In de noemer van een breuk kan, zoals we boven al gezien hebben, geen 0 staan!

Breuken kunnen worden vereenvoudigd door teller en noemer door eenzelfde getal te delen.

VOORBEELD

$\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (teller en noemer zijn door 2 gedeeld)

Opgave 38 Vereenvoudig.

a) $\frac{3}{9}$ c) $\frac{27}{63}$ e) $\frac{35}{42}$ g) $\frac{99}{121}$

b) $\frac{16}{32}$ d) $\frac{128}{256}$ f) $\frac{60}{72}$ h) $\frac{17}{51}$

Voor we vermenigvuldigen wordt van alle samengestelde breuken eerst enkelvoudige breuken gemaakt.

VOORBEELD

$3\frac{7}{9} = \frac{34}{9}$

dus $3\frac{7}{9} \times \frac{3}{17} = \frac{34}{9} \times \frac{3}{17} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{1} = \frac{2}{3}$

Opgave 39 Neem over en bereken. (Schrijf altijd de tussenstappen erbij, óók als het niet gevraagd wordt!)

a) $\frac{1}{3} \times \frac{2}{4}$ c) $\frac{4}{7} \times \frac{3}{21}$ e) $12\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{4}$

b) $\frac{1}{7} \times \frac{7}{3}$ d) $1\frac{1}{7} \times 3\frac{2}{7}$ f) $3\frac{1}{5} \times 1\frac{1}{16}$

Opgave 40 Neem over en bereken.

a) $2\frac{1}{7} \times -\frac{3}{4}$ c) $-2\frac{1}{3} \times -3\frac{1}{7}$ e) $-17 \times \frac{3}{17}$

b) $3\frac{1}{5} \times -\frac{3}{2}$ d) $-12\frac{1}{7} \times 7$ f) $-13 \times -2\frac{6}{13}$

Opgave 41 Neem over en bereken.

a) $-\frac{2}{3} \times -\frac{5}{6}$ c) $-1\frac{1}{2} \times -2\frac{1}{3}$ e) $-1\frac{3}{5} \times 4$

b) $\frac{5}{9} \times -\frac{3}{4}$ d) $\frac{100}{101} \times -0,101$ f) $2\frac{2}{3} \times 0,75$

Vaak is het handig om al vóór het vermenigvuldigen kruislings weg te delen:

VOORBEELD

$\frac{2}{7} \times \frac{14}{6} = \frac{2\times14}{7\times6} = \frac{1\times2}{1\times3} = \frac{2}{3}$ (2 en 6 zijn door 2 gedeeld en 7 en 14 door 7)

$\frac{3}{8} \times \frac{16}{15} = \frac{3\times16}{8\times15} = \frac{1\times2}{1\times5} = \frac{2}{5}$

$\frac{72}{121} \times \frac{11}{9} = \frac{72\times11}{121\times9} = \frac{8\times1}{11\times1} = \frac{8}{11}$

Opgave 42 Neem over en bereken.

a) $3\frac{2}{7} \times -\frac{12}{23}$ c) $\frac{15}{24} \times \frac{3}{5}$ e) $-6\frac{2}{5} \times -\frac{3}{16}$

b) $-7\frac{1}{3} \times -\frac{21}{6}$ d) $\frac{17}{19} \times -7\frac{3}{5}$ f) $-3\frac{3}{14} \times \frac{8}{9}$

Opgave 43 Neem over en bereken.

a) $12\frac{1}{3} \times -\frac{18}{37}$ c) $-123\frac{1}{3} \times \frac{3}{369}$ e) $17\frac{1}{3} \times 2\frac{1}{13}$

b) $7\frac{1}{7} \times \frac{12}{25}$ d) $12\frac{1}{9} \times -4\frac{1}{2}$ f) $-5\frac{1}{11} \times 4\frac{1}{8}$

Opgave 44 Neem over en bereken.

a) $17\frac{3}{4} \times -2\frac{3}{71}$ c) $-12\frac{1}{3} \times -\frac{6}{37}$ e) $6\frac{2}{7} \times 3\frac{7}{3}$

b) $-7\frac{1}{9} \times 1\frac{3}{32}$ d) $3\frac{1}{27} \times \frac{11}{18}$ f) $-7\frac{1}{6} \times 2\frac{4}{5}$

Opgave 45 Bereken op de handigste manier:

a) $8\frac{1}{8} \times \frac{856}{901} \times \frac{1802}{856}$

b) $7\frac{1}{3} \times 12 \times \frac{1}{22}$

1.3.5 De deling

In de deling $8 : 2 = 4$ heet het getal 8 het **deeltal,** het getal 2 de **deler** en 4 de **uitkomst**. Een deling wordt ook wel een **quotiënt** genoemd.

Dus:

- deeltal : deler = uitkomst

We spreken af dat dit waar is als het volgende klopt:

- uitkomst × deler = deeltal

VOORBEELD

$8 : 4 = 2$ omdat $2 \times 4 = 8$.

Uit deze afspraak volgt dat je niet door 0 kunt delen! Want als $8 : 0 = uitkomst$, dan moet $uitkomst \times 0 = 8$ zijn, wat onzin is. En als $0 : 0 = uitkomst$ dan moet $uitkomst \times 0 = 0$ zijn, maar elk getal keer 0 is gelijk aan 0, dus dan zou elk getal goed zijn als uitkomst en dat is ook een gekke situatie! We zeggen daarom wel:

Delen door 0 is flauwekul.

Je ziet dat delen aan de hand van het vermenigvuldigen wordt uitgelegd. De regels die voor het *teken* (dat wil zeggen + of −) van de uitkomst van een vermenigvuldiging gelden, gelden dus ook voor de deling.

Dus deel je twee getallen waarvan de tekens gelijk zijn, dan is de uitkomst positief en deel je twee getallen waarvan de tekens verschillen, dan is de uitkomst negatief.

Let op: $7 : 4 = \frac{7}{4}$, want $\frac{7}{4} \times 4 = \frac{7}{4} \times \frac{4}{1} = 7$.

Vandaar dat delingen zoals $7 : 4$ ook wel direct als $\frac{7}{4}$ gelezen worden. Omgekeerd wordt de breuk $\frac{7}{4}$ wel gelezen als *7 gedeeld door 4* .

Zie je dat de deling $7 : 4$ dezelfde uitkomst heeft als de vermenigvuldiging $7 \times \frac{1}{4}$? Maar let weer op:

$7 : \frac{1}{4} = 28$, want $28 \times \frac{1}{4} = 7$ (vergelijk steeds $10 : 2 = 5$, want $5 \times 2 = 10$).

We hebben gezien:

$$7 : 4 = 7 \times \frac{1}{4} \quad \text{en}$$

$$7 : \frac{1}{4} = 7 \times \frac{4}{1}.$$

We zeggen wel voor het gemak:

- *delen door een getal is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van dat getal.*

Deze truc werkt ook bij het op elkaar delen van twee breuken. Kijk maar:

$$\frac{5}{7} : \frac{2}{3} = \frac{5}{7} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{14}.$$

Controle:

$$\frac{15}{14} \times \frac{2}{3} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}.$$

Juist bij het delen door een breuk is de regel erg handig: *delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.* Nog een voorbeeld:

$$12 : \frac{3}{4} = 12 \times \frac{4}{3} = \ldots = 16 \text{ (reken dit zelf na!)}$$

Controle:

$$12 : \frac{3}{4} = 16 \text{ klopt, want } \frac{3}{4} \times 16 = \ldots = 12.$$

Opgave 46 Neem over en bereken.

a) $12 : 36$	f) $12 : 4$	k) $12 : \frac{1}{2}$	p) $12 : -2$
b) $12 : 24$	g) $12 : 3$	l) $12 : \frac{1}{4}$	q) $-12 : -2$
c) $12 : 12$	h) $12 : 2$	m) $12 : \frac{1}{100}$	r) $\frac{1}{12} : 2$
d) $12 : 6$	i) $12 : 1$	n) $12 : \frac{1}{1.000.000}$	s) $\frac{1}{12} : \frac{1}{2}$
e) $12 : 5$	j) $12 : \frac{3}{4}$	o) $12 : 0$	t) $\frac{1}{12} : \frac{3}{4}$

Opgave 47 Neem over en bereken.

a) $3 : 7$	c) $0 : -100$	e) $-99 : 1$
b) $-8 : 5$	d) $-18 : -54$	f) $-2 : 0$

Opgave 48 Delen met breuken. Voorbeeld:

$\frac{1}{3} : \frac{5}{12} = \frac{1}{3} \times \frac{12}{5} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$.

a) $\frac{1}{2} : \frac{3}{4}$ c) $\frac{7}{8} : \frac{1}{2}$ e) $\frac{11}{15} : \frac{3}{5}$

b) $\frac{3}{7} : \frac{3}{14}$ d) $\frac{1}{9} : \frac{3}{18}$ f) $-\frac{1}{4} : \frac{1}{9}$

Opgave 49 Delen met breuken. Voorbeeld:

$1\frac{1}{10} : \frac{2}{3} = \frac{11}{10} : \frac{2}{3} = \frac{11}{10} \times \frac{3}{2} = \frac{33}{20}$ (of $1\frac{13}{20}$).

a) $1\frac{1}{8} : \frac{1}{2}$ c) $-\frac{3}{5} : -\frac{3}{7}$ e) $-1\frac{4}{5} : \frac{5}{7}$

b) $\frac{2}{5} : -\frac{2}{3}$ d) $2\frac{2}{3} : 1\frac{3}{7}$ f) $3\frac{1}{4} : 1\frac{1}{9}$

Opgave 50 Delen met breuken.

a) $5 : \frac{1}{2}$ c) $3 : 0,6$ e) $1\frac{1}{9} : -3\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{2} : 5$ d) $-\frac{3}{5} : -2\frac{1}{2}$ f) $-2,7 : -1\frac{2}{7}$

We spreken af dat we voortaan altijd van een aftrekking een optelling maken.

Voorbeeld

$3 - 4 + 2$ lezen we voortaan als $3 + -4 + 2$

Het min-teken hoort dus altijd bij het getal erachter!

Samenvattend kunnen we zeggen dat al ons rekenen, tot nu toe, is gebaseerd op het optellen :

-aftrekken is optellen van negatieve getallen

-vermenigvuldigen is herhaald optellen

-delen is weer vermenigvuldigen met het omgekeerde.

1.3.6 De volgorde van berekeningen en haakjes

Als niet zomaar van links naar rechts gerekend moet worden, staan er haakjes in een berekening. De afspraak is dan dat je *eerst uitrekent wat tussen haakjes staat en dan pas verder gaat.* Dit wordt ook wel **haakjes wegwerken** genoemd.

Hier volgen wat voorbeelden:

$$(2 - 3) - 6 = -1 - 6 = -7$$

is hetzelfde als $2 - 3 - 6$.

Maar als de haakjes op een andere plaats staan dan verloopt de berekening heel anders:

$$2 - (3 - 6) = 2 - -3 = 2 + 3 = 5.$$

$$-(9 - 12) = - - 3 = 3$$

Je ziet direct dat het voor de uitkomst heel veel uitmaakt waar de haakjes staan. Soms maakt het niets uit:

$$(2 + 3) + 6 = 5 + 6 = 11,$$

Maar ook

$$2 + (3 + 6) = 2 + 9 = 11.$$

Nu dan een voorbeeld waarin ook vermenigvuldiging staat:

$$2 - (3 \times -4) = 2 - -12 = 2 + 12 = 14,$$

Maar

$$(2 - 3) \times -4 = -1 \times -4 = 4.$$

Het is ook mogelijk dat er haakjes met daarbinnen weer haakjes staan. Zoals in:

$$\begin{aligned} ((2 - ((3 \times -4) \times (-5 + 1)) - -2) - 3) - 7 &= ((2 - (-12 \times -4) - -2) - 3) - 7 \\ &= ((2 - 48 + 2) - 3) - 7 \\ &= (-44 - 3) - 7 \\ &= -47 - 7 \\ &= -54. \end{aligned}$$

Een uitdrukking met veel haakjes gaat er al snel onduidelijk uitzien. Om het aantal haakjes enigszins te beperken, is de volgende afspraak gemaakt:

- *vermenigvuldigen (en dus ook delen) gaat vóór optellen (en dus ook aftrekken).*

En vergeet niet de regel waarmee we deze paragraaf begonnen:

- *reken eerst alles uit wat tussen de haakjes staat en ga dan pas verder.*

VOORBEELDEN

$$\begin{array}{lll} 20 - 3 \times 4 = & \text{maar} & (20-3) \times 4 = \\ \quad 20 - 12 \quad = 8 & & \quad 17 \times 4 \quad = 68 \end{array}$$

Het is dus niet nodig om in $20 - 3 \times 4$ haakjes om de vermenigvuldiging te zetten.

1.3.7 Rekenen met samengestelde breuken

Kijk eens naar de volgende uitwerkingen:

$$2 \times (5+3) = 2 \times 8 = 16,$$

maar je zou ook kunnen zeggen

$$2 \times (5+3) = (5+3) + (5+3) = 5+5+3+3 = 2 \times 5 + 2 \times 3.$$

Evenzo:

$$21 \times (70+2) = 21 \times 70 + 21 \times 2.$$

En kijk eens naar

$$-2\tfrac{1}{3} = -(2 + \tfrac{1}{3}) = -1 \times (2 + \tfrac{1}{3}) = -1 \times 2 + -1 \times \tfrac{1}{3} = -2 - \tfrac{1}{3}$$

en *niet* $-2 + \frac{1}{3}$!

Samengestelde breuken zijn breuken van de vorm $2\frac{1}{3}$. Hier moet je dus lezen: $2 + \frac{1}{3}$ (en zeker *niet* $2 \times \frac{1}{3}$). Moet je $5 \times 2\frac{1}{3}$ uitrekenen, dan begrijp je nu (vanwege het bovenstaande) dat

$$\begin{aligned} 5 \times 2\tfrac{1}{3} &= 5 \times (2 + \tfrac{1}{3}) = 5 \times 2 + 5 \times \tfrac{1}{3} \\ &= 10 + \tfrac{5}{3} = \tfrac{30}{3} + \tfrac{5}{3} \\ &= \tfrac{35}{3} \text{ (of, als je wilt, } 11\tfrac{2}{3}). \end{aligned}$$

Dit is een andere manier dan jullie eerder in dit boekje hebben geleerd:

$$5 \times 2\tfrac{1}{3} = 5 \times \tfrac{7}{3} = \tfrac{35}{3} \text{ (of } 11\tfrac{2}{3}).$$

Let op bij optellen en aftrekken:

$$2\tfrac{1}{3} + 7\tfrac{1}{3} = 2 + \tfrac{1}{3} + 7 + \tfrac{1}{3} = 2 + 7 + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3} = 9 + \tfrac{2}{3} = 9\tfrac{2}{3},$$

Maar

$$2\tfrac{1}{3} - 7\tfrac{1}{3} = 2 + \tfrac{1}{3} - (7 + \tfrac{1}{3}) = 2 + \tfrac{1}{3} - 7 - \tfrac{1}{3} = 2 - 7 + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{3} = -5.$$

Opgave 51 Welke van onderstaande berekeningen is juist?

$2 + 3 \times 5 = 5 \times 5 = 25$ of $2 + 3 \times 5 = 2 + 15 = 17$?

Opgave 52 Neem over en vul in:

a) $9 \times 3 - (5 - 1) = 9 \times 3 - \ldots = \cdots - \ldots = \ldots$

b) $7 + 5 \times -6 = 7 + \ldots = \ldots$

c) $(7 + 5) \times -6 = \ldots \times -6 = \ldots$

d) $-3 + 5 - 45 : 9 = -3 + 5 - \ldots = \ldots$

Opgave 53 Neem over en bereken:

a) $-3 \times -4 + 5 - 45 : -5$

c) $-3 \times -4 + (5 - 45) : -5$

b) $-3 \times (-4 + 5) - 45 : -5$

d) $-3 \times (-4 + 5 - 45) : -5$

Opgave 54 Haakjes vergeten. Neem over en zet links van = haakjes zodat het klopt. Voorbeeld:

$-2 - 3 - 4 = -1$ klopt niet, maar zet je slim haakjes, zoals
$-2 - (3 - 4) = -2 - -1 = -1$, dan klopt het wel!

a) $-27 - 9 + 21 = 3$

c) $-13 + 5 - 19 : 9 = -3$

b) $-27 - 9 + 21 = -57$

d) $-13 + 5 - 18 : 9 = -20$

Opgave 55 Neem over en bereken:

a) $(2 \times 3 - 7 \times -4) \times -5$

d) $-(2 \times 3 - 7) + 4 \times 2$

b) $-2 \times 3 - (7 \times -4 - 3)$

e) $-2 \times 3 - 7 \times (4 + 3 \times -1)$

c) $-2 \times (3 - 7) - 4 \times -3$

f) $-2 \times (3 - (4 \times 5 + 1) - 7)$

1.3.8 Machtsverheffen

Herhaald vermenigvuldigen wordt als volgt afgekort:

$$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2.$$

Spreek dit uit als: "2 tot de 5^e macht" of als "2 tot de 5^e".

En 3^2 wordt uitgesproken als "3 tot de 2^e" of ook als "3 *kwadraat*". 2^5 heet een **macht**. Daarin worden 2 het **grondtal** en 5 de **exponent** genoemd. Met $2^4 \times 10^6$ bedoelen we dus

$$2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 16 \times 1.000.000 = 16.000.000$$

(let op: je ziet dat je eerst moet machtsverheffen voordat je gaat vermenigvuldigen!)

en

$$\left(\tfrac{3}{10}\right)^4 = \tfrac{3}{10} \times \tfrac{3}{10} \times \tfrac{3}{10} \times \tfrac{3}{10} = \tfrac{3^4}{10^4} = \tfrac{81}{10.000}.$$

Opgave 56 Schrijf als vermenigvuldiging en bereken:

a) 3^4 c) $2^3 \times 5^4$ e) 10^9

b) $(1\frac{1}{2})^2$ d) $(-1)^{101}$ f) 4×10^3

Opgave 57 Neem over en schrijf als macht.

Voorbeeld: $2^2 \times 2 = 2^3$.

a) $2^4 \times 2^5$ c) $2^{12} \times 2$

b) $3^6 \times 3^7$ d) $2^3 \times 2^4$

Opgave 58 Neem over en schrijf als macht.

Voorbeeld: $2^9 : 2^2 = 2^7$ (want $2^7 \times 2^2 = 2^9$!)

a) $2^5 : 2^4$ c) $2^7 : 2^3$

b) $2^6 : 2$ d) $3^3 : 3$

Opgave 59 Neem over en bereken:

a) $(\frac{1}{3})^2$ c) $(\frac{1}{5})^3$

b) $(\frac{2}{7})^3$ d) $((\frac{2}{3})^2)^3$

Opgave 60 Neem over en bereken:

a) $(((-2)^2)^2)^2$

b) $(-3)^3$

c) $((-3)^2)^3$

d) $((-\frac{1}{3})^2)^3$

Opgave 61 Vul de bijpassende exponenten in.

a) $(\frac{1}{10})^{\cdots} = \frac{1}{10000}$ b) $(\frac{2}{3})^{\cdots} = \frac{16}{81}$ c) $(\frac{1}{2})^{\cdots} = \frac{1}{256}$

1.4 Algoritmes

1.4.1 Vermenigvuldigen van natuurlijke getallen

Voorbeeld 1

12×23

Ga als volgt te werk:

Schrijf de getallen onder elkaar, met een streep eronder en een maal-teken achter de streep en maak de berekening met de volgende stappen:

$$\begin{array}{r} 23 \\ 12\ \times \\ \hline \end{array}$$

vermenigvuldig 23 eerst met 2 eenheden:

$$\begin{array}{r} 23 \\ 12\ \times \\ \hline 46 \end{array}$$

Vermenigvuldig 23 met 1 tiental, schrijf eerst de nul op:

$$\begin{array}{r} 23 \\ 12\ \times \\ \hline 46 \\ 230 \end{array}$$

Tel als laatste de twee uitkomsten op:

$$\begin{array}{r} 23 \\ 12\ \times \\ \hline 46 \\ 230\ + \\ \hline 276 \end{array}$$

Voorbeeld 2

13×372

Berekening:

$$\begin{array}{r} 372 \\ 13\ \times \\ \hline 1116 \\ 3720\ + \\ \hline 4836 \end{array}$$

Opgave 62 Bereken onder elkaar: (Zet het grootste getal boven)

a) 123×73 b) 203×14
c) 250×1201 d) 99×99

1.4.2 Vermenigvuldigen van decimale gebroken getallen (kommagetallen)

VOORBEELD 1

$12,3 \times 27,12$

Berekening:

$$
\begin{array}{rl}
12{,}3 & \\
27{,}12 & \times \\
\hline
246 & \\
1230 & \\
86100 & \\
246000 & + \\
\hline
333576 &
\end{array}
$$

Tel nu het aantal cijfers achter de komma bij $12,3 \times 27,12$ samen. Dat zijn er drie. In de uitkomst moeten nu ook drie cijfers achter de komma komen. Het wordt dus:

$$
\begin{array}{rl}
12{,}3 & \\
27{,}12 & \times \\
\hline
246 & \\
1230 & \\
86100 & \\
246000 & + \\
\hline
333{,}576 &
\end{array}
$$

VOORBEELD 2

$52,3 \times 7,721$

Berekening:

$$
\begin{array}{rl}
52{,}3 & \\
7{,}721 & \times \\
\hline
523 & \\
10460 & \\
366100 & \\
3661000 & + \\
\hline
403{,}8083 &
\end{array}
$$

Opgave 63 Bereken onder elkaar:

a) $1,1 \times 1,11$ b) $2,5 \times 12,01$
c) $3,8 \times 10,02$ d) $0,99 \times 0,99$

1.4.3 Delingen van natuurlijke getallen

Deling zonder rest

VOORBEELD 1

156:12

Berekening:

```
12 /156\
```

12 past 1 keer in 15. Je houdt nu 3 over.

```
12 / 156 \  1
     12
      3
```

Haal de 6 aan, 12 past 3 keer in 36. Je houdt nu 0 over.

```
12 /  156  \ 13
      12
       36
       36
        0
```

Deling met rest

VOORBEELD 2

156:11

Berekening:

```
11 / 156 \ 14
     11
      46
      44
       2
```

Uitkomst: $14\frac{2}{11}$

1.4.4 Deling met decimale, gebroken uitkomst

VOORBEELD 3

156:11

Berekening:

11 / 156 \ 14,181818 *enz.*
$\underline{11}$
46
$\underline{44}$
20
$\underline{11}$
90
$\underline{88}$
20

We schrijven de uitkomst als: $4,\cancel{1}\cancel{8}$

N.B. Zodra we met de resten verder delen door nullen toe te voegen, schrijven we in de uitkomst een komma!

De streepjes door de 1 en de 8 geven aan dat 18 zich steeds herhaalt.

1.4.5 Delen van decimale gebroken getallen

VOORBEELD 1

13,2:7 Er staat een komma in het deeltal.

Berekening:

7 / 13,2 \ 1,8857142
$\underline{7}$
62
$\underline{56}$
60
$\underline{56}$
40
$\underline{35}$
50
$\underline{49}$
10
$\underline{07}$
30
$\underline{28}$
20
$\underline{14}$
6

Uitkomst: $1,8\,\cancel{8}\,5714\,\cancel{2}$

NB: Zodra je het getal achter de komma aanhaalt, zet je in de uitkomst ook een komma. Dit is eigenlijk hetzelfde als in het vorige voorbeeld, alleen stond daar achter de komma een nul!

VOORBEELD 2

132:2,4 Er staat en komma in de deler.

Berekening:

Vermenigvuldig de deler en deeltal met 10. Je krijgt 1320:24. Deze deling heeft dezelfde uitkomst (waarom?), maar je hoeft je niet meer druk te maken om de komma.

```
24 / 1320 \ 55
     120
      120
      120
        0
```

1.4.6 Decimale getallen, breuken en benaderen

Van een breuk of een deling kun je m.b.v. de staartdeling berekenen welk decimaal getal er uit komt. Bijvoorbeeld: $40,3 : 0,013 = \frac{40,3}{0,013} = \frac{40300}{13}$

```
13 / 40300 \ 3100
     39
      13
      13
       0
```

Dus: $40,3 : 0,013 = 3100$.

Als een deling niet 'opgaat', d.w.z. er komt nooit een einde aan de staartdeling, dan wordt het antwoord **afgerond op een aantal decimalen**.

Maak maar eens de staartdeling bij $1 : 7$. Op zeven decimalen afgerond komt er $0,1428571$ uit. Als een uitkomst niet exact juist is, maar een afgerond getal, dan wordt het *is-ongeveer-gelijk-teken* gebruikt: $1 : 7 \approx 0,1428571$.

VOORBEELD 1

Bereken $50 : 13$ en benader $50 : 13$ in twee decimalen, in één decimaal en in gehelen nauwkeurig:

Dan $50 : 13 = 3 + 11 : 13 = 3\frac{11}{13}$ óf:

$$\begin{array}{l}
13\ /\ 50{,}000 \backslash\ 3{,}846 \\
\quad \underline{39} \\
\quad 110 \\
\quad \underline{104} \\
\quad\ \ 60 \\
\quad\ \ \underline{52} \\
\quad\ \ \ 80
\end{array}$$

Dus $50 : 13 \approx 3,85$ (twee decimalen), of $50 : 13 \approx 3,8$ (één decimaal), of $50 : 13 \approx 4$ (gehelen).

VOORBEELD 2

Bereken $2 : 11$ en benader $2 : 11$ in drie decimalen en in twee decimalen nauwkeurig:

Dan $2 : 11 = \frac{2}{11}$ óf:

$$\begin{array}{l}
13\ /\ 2{,}0000 \backslash\ 0{,}1818 \\
\quad \underline{1\ 1} \\
\quad\ \ 90 \\
\quad\ \ \underline{88} \\
\quad\ \ 20 \\
\quad\ \ \underline{11} \\
\quad\ \ \ 90 \\
\quad\ \ \ \underline{88} \\
\quad\ \ \ \ 2
\end{array}$$

Dus $2 : 11 \approx 0,182$ (drie decimalen) of $2 : 11 \approx 0,18$ (twee decimalen).

Bij $2 : 11$ is de uitkomst een **repeterende breuk**. Als je van $2 : 11$ een staartdeling maakt, wisselen in de uitkomst de decimalen 1 en 8 elkaar tot in het oneindige af: $0,181818\ldots$ We schrijven ook wel $0{,}\cancel{1}\cancel{8}$.

Van een repeterende breuk kun je met een handig trucje altijd de breuk vinden:

VOORBEELD 3

$$\text{Als } \texttt{breuk} = 0{,}\cancel{3} \text{ dan weet je } \begin{array}{rcl} 10 \times \texttt{breuk} & = & 3,3333\ldots \\ 1 \times \texttt{breuk} & = & 0,3333\ldots \\ \hline 9 \times \texttt{breuk} & = & 3 \end{array} -$$

dus $\texttt{breuk} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.

VOORBEELD 4

Als $\texttt{breuk} = 0,\cancel{18}$ dan weet je

$$\begin{array}{rcl} 100 \times \texttt{breuk} & = & 18,181818\ldots \\ 1 \times \texttt{breuk} & = & 0,181818\ldots \quad - \\ \hline 99 \times \texttt{breuk} & = & 18 \end{array}$$

dus $\texttt{breuk} = \frac{18}{99} = \frac{2}{11}$.

Opgave 64 Bereken en geef je antwoord als breuk èn als repeterend of decimaal getal:

a) $1 : 6$

b) $13 : 9$

c) $100 : 7$

d) $98 : 50$

Opgave 65 Doe de vorige opgave nog eens, maar geef nu benaderingen van de uitkomsten in één, twee en drie decimalen.

Opgave 66 Bereken met een staartdeling:

a) $13683 : 0,3$

b) $1,353 : 11$

Opgave 67 Schrijf als breuk:

a) $0,\cancel{2}$

b) $0,\cancel{6}$

c) $0,\cancel{0}\cancel{9}$

d) $1,1\,\cancel{1}\cancel{2}$

Alles door elkaar

Opgave 68 Maak een samenvatting van alle belangrijke regels die je hebt gehad in de paragraaf 1.2 t/m 1.4.

Opgave 69 Neem over, bereken en vul in op de ... :

a) $-7 + 4 = \dots$ want de eerste pijl gaat van ... naar ... en de tweede van ... naar ...

b) $-7 + -6 = \dots$ want de eerste pijl gaat van ... naar ... en de tweede van ... naar ...

c) $5 - -3 = \dots$ want de eerste pijl gaat van ... naar ... en de tweede van ... naar ...

Opgave 70 Neem over, bereken en vul in op de ... :

a) $-5 \times 2 = \dots$ want het tegengestelde van de pijl van 0 naar ... wordt ... keer zo lang

b) $5 \times -3 = \dots$ want de pijl van 0 naar ... wordt ... keer zo lang

c) $-5 \times -4 = \dots$ want het tegengestelde van de pijl van 0 naar ... wordt ... keer zo lang

Opgave 71 Neem over en bereken met behulp van tussenstappen:

a) $\frac{7}{11} + \frac{7}{22}$

b) $\frac{2}{11} - \frac{7}{22}$

c) $\frac{2}{11} \times \frac{7}{22}$

d) $1\frac{1}{4} \times 2\frac{1}{5}$

e) $-1\frac{4}{5} \times \frac{5}{7}$

f) $-1\frac{4}{5} - \frac{5}{7}$

g) $\frac{2}{5} : -\frac{3}{7}$

h) $2\frac{2}{3} : 1\frac{3}{7}$

Opgave 72 Neem over en vul in:

a) $(9 - 5) \times 4 = \dots \times 4 = \dots$

b) $9 \times -2 + 5 \times 4 = \dots + \dots = \dots$

c) $(9 + 5) \times 4 = \dots \times 4 = \dots$

d) $-9 : 3 \times (-7 + 4) = -9 : 3 \times \dots = \dots$

Opgave 73 Neem over en bereken met behulp van tussenstappen:

a) $20 - 2 \times 8 + 4$

b) $-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}$

c) $-1\frac{5}{12} - \frac{7}{18}$

d) $3 - (2 - 4 \times 3)$

e) $-3 \times 5 + 3 \times 5$

f) $(3 - 5) + (3 - 5)$

g) $3 - 5 \times 3 - 5$

h) $12 : 0 + 1$

i) $\frac{-8 \times 8}{8+8}$

j) $3 \times 6 : 9 : 7 - 1$

Opgave 74 Neem over en bereken met behulp van tussenstappen:

a) $-1\frac{2}{9} + 3\frac{4}{21}$

b) $7 + 9 \times -3$

c) $-1 - 3 : 11$

d) $-3 \times 8 - 13 \times -2$

e) $2 : (12 - 4 \times 3)$

f) $(-18 + 9) : 18 - 9$

g) $(-55 + 6 \times 50) : -5$

h) $5 \times \frac{-21}{-7} - (-4 - 8) \times 3$

1.5 Getaltheorie

1.5.1 Natuurlijke, gehele en rationale getallen

De getallen $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ enz. worden de **natuurlijke getallen** genoemd (de hele verzameling van al deze getallen bij elkaar noteren we met het teken: $\mathbb{N}$); de getallen $\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots$ de **gehele getallen** (notatie: $\mathbb{Z}$) en de gehele en gebroken getallen samen de **rationale getallen** ($\mathbb{Q}$).

1.5.2 Deelbaarheid

Een natuurlijk getal heet **deelbaar** als je het door een ander natuurlijk getal, ongelijk aan 0, kunt delen en de uitkomst een natuurlijk getal is. Dat andere getal heet de **deler**. Ook 1 en het getal zelf heten delers!

VOORBEELD
26 is een deelbaar getal; de delers van 26 zijn 1, 2, 13 en 26.

1.5.3 Priemgetallen

Een **priemgetal** is een natuurlijk getal dat precies twee delers heeft, namelijk 1 en zichzelf. Het getal 1 wordt niet tot de priemgetallen gerekend. Dat klopt met de definitie, want 1 heeft niet twee, maar slechts één deler.

VOORBEELD:
7 is een priemgetal, want 7 is slechts deelbaar door 1 en 7.

Opgave 75 Is 143 een priemgetal? En 149? Geef een verklaring bij je antwoorden.

De zeef van Eratosthenes

Er zijn getallen waarvan het direct duidelijk is dat het geen priemgetallen zijn. 375 bijvoorbeeld is onder meer deelbaar door 5, en dus niet priem.

Alle even getallen hebben 2 als deler, en zijn dus - behalve 2 zelf - geen priemgetallen. Maar het gaat niet altijd even makkelijk.

Straks word je gevraagd alle priemgetallen onder de honderd te noemen. Je zou van elk getal kunnen onderzoeken of het delers heeft. Sneller is het om gebruik te maken van de methode van de Griekse wetenschapper/astronoom Eratosthenes (ongeveer 276 - 196 voor Christus):

- orden de getallen in een vierkant

- 'zeef' de getallen die deelbaar zijn door 2 uit het vierkant
- 'zeef' de getallen die deelbaar zijn door 3 uit het vierkant
- 'zeef' de getallen die deelbaar zijn door 5 uit het vierkant
- 'zeef' de getallen die deelbaar zijn door 7 uit het vierkant

Opgave 76 Neem onderstaande tabel over in je schrift, gebruik de "zeef"-methode van Eratosthenes en geef alle priemgetallen onder de 100.

	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Opgave 77 Waarom hoeven de getallen die deelbaar zijn door 4 niet uit het vierkant te worden gezeefd?

Opgave 78 Waarom hoeven de getallen die deelbaar zijn door 11 niet uit het vierkant te worden gezeefd?

Opgave 79 Stel dat gevraagd wordt alle priemgetallen onder de 900 te geven met behulp van een zeef. Wat is dan het grootste getal waarmee gezeefd moet worden?

1.5.4 Som, verschil, product, quotiënt

- $2+3+4$ heet de **som** van de **termen** 2, 3 en 4. De uitkomst van deze som is 9.
- $20-6$ heet het **verschil** van de termen 20 en 6. De uitkomst van dit verschil is 14.
- $2\times 3\times 4$ heet het **product** van de **factoren** 2, 3 en 4. De uitkomst van dit product is 24.

- 20 : 5 heet het **quotiënt** van deeltal 20 en deler 5. De uitkomst van dit quotiënt is 4.

Opgave 80
a) 9 kan op meer manieren als som van drie termen geschreven worden; geef drie manieren.
b) 14 kan op meer manieren als verschil van twee termen geschreven worden; geef drie manieren.
c) 24 kan op meer manieren als product van drie factoren geschreven worden; geef drie manieren.
d) 4 kan op meer manieren als quotiënt van deler en deeltal geschreven worden; geef drie manieren.

De wiskundige Christian Goldbach (1690-1764) schreef in 1742 in een brief naar zijn vakgenoot Euler:

"Elk even getal groter dan 2 is te schrijven als som van twee priemgetallen."

Deze bewering wordt *Het vermoeden van Goldbach* genoemd. Tot nu toe heeft nog niemand kunnen bewijzen, dat dit voor alle even getallen klopt!

Opgave 81 Onderzoek of het vermoeden van Goldbach klopt voor de even getallen van 90 t/m 100.

Als een factor een priemgetal is, wordt die factor een **priemfactor** genoemd.

Voorbeelden

- $6 = 2 \times 3$, je kan ook zeggen: 6 is gelijk aan het product van de priemfactoren 2 en 3.
- $45 = 3 \times 3 \times 5$, of: 45 is gelijk aan het product van de priemfactoren 3, 3 en 5. Korter opgeschreven: $45 = 3^2 \times 5$.

De hoofdstelling van de rekenkunde luidt:

Elk natuurlijk getal groter dan 1 kan op precies één manier geschreven worden als een product van één of meer priemfactoren.

Het schrijven van een natuurlijk getal, dat groter dan 1 is, als de uitkomst van een vermenigvuldiging van priemgetallen wordt ook wel *het ontbinden in priemfactoren* van dat getal genoemd.

Voorbeeld
Ontbind het getal 260 in zijn priemfactoren.

Uitwerking

Ik ga eerst door 2 delen tot het niet meer lukt, dan door 3, dan door 5, 7, 11, enzovoort.

- $260 : 2 = 130$
  - $130 : 2 = 65$
  - $65 : 5 = 13$
  - de getallen 2, 2, 5 en 13 zijn alle priem, en $260 = 2 \times 2 \times 5 \times 13$. Korter opgeschreven: $260 = 2^2 \times 5 \times 13$.

Opgave 82 Ontbind in priemfactoren en schrijf het antwoord met de korte notatie

a) 12 c) 82 e) 351

b) 75 d) 83 f) 936

In plaats van alleen de priemfactoren kun je ook alle delers van een getal gaan zoeken.

Voorbeeld
Bereken alle delers van het getal 260.

Uitwerking

Je weet al dat $260 = 2^2 \times 5 \times 13$.

Er zijn veel meer delers dan priemfactoren, kijk maar:

- Allereerst is 1 een deler van 260.
  - Vervolgens zijn er de drie priemfactoren: 2, 5 en 13.
  - Dan zijn er delers opgebouwd uit twee priemfactoren: $2 \times 2 = 4$, $2 \times 5 = 10$, $2 \times 13 = 26$ en $5 \times 13 = 65$.
  - Dan de delers opgebouwd uit drie priemfactoren: $2 \times 2 \times 5 = 20$, $2 \times 2 \times 13 = 52$ en $2 \times 5 \times 13 = 130$.
  - En tot slot 260 zelf.

  Conclusie: de delers van 260 zijn: 1, 2, 4, 5, 10, 13, 20, 26, 52, 65, 130 en 260.

Om alle delers op systematische wijze te vinden doen we het vaak zo:

260	
1	260
2	130
4	65
5	52
10	26
13	20

Opgave 83 Bereken alle delers van de getallen:

a) 12 c) 82 e) 351

b) 75 d) 83 f) 936

1.5.5 Deficiënte, excessieve en volmaakte getallen

Pythagoras (ongeveer 580 - 500 voor Christus) en zijn volgelingen hebben vele getallen onderzocht op hun specifieke kenmerken. Eén van de operaties waaraan een getal kon worden onderworpen, was de berekening van de som (optelling) van alle delers. Hier moet worden opgemerkt dat de oude Grieken bij het noemen van de delers het te onderzoeken getal zélf niet als deler beschouwden; 10 bijvoorbeeld werd niet als deler van 10 gezien. Let op: dit is dus anders dan gebruikelijk!

Aldus maakte men onderscheid tussen drie soorten getallen:

- De getallen waarvan de som der delers kleiner is dan het getal zelf, de deficiënte getallen. Zo is 10 een deficiënt getal, want de som der delers is kleiner dan 10.
- De getallen waarvan de som der delers groter is dan het getal zelf, de excessieve getallen. 12 is een excessief getal, want de som der delers is groter dan 12.
- En tot slot de getallen waarvan de som der delers precies gelijk is aan het getal zelf, de volmaakte getallen. Volmaakte getallen zijn zeldzaam; van de eerste vijf miljard getallen zijn er slechts vijf volmaakt. De kleinste ervan is 6. Ga maar na.

De oude Grieken bedachten nog meer, bijvoorbeeld "bevriende getallen". Dan moet de som van de delers van het ene getal gelijk zijn aan het andere getal en omgekeerd. Het kost wel even tijd om zo'n bevriend paar te vinden. Kijk maar of dat je lukt.

Opgave 84 Onderzoek voor alle getallen tussen de 20 en 30 of ze deficiënt, excessief of volmaakt zijn.

1.5.6 De grootste gemene deler

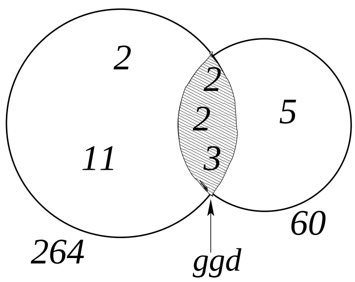
Twee natuurlijke getallen hebben altijd één of meer dezelfde delers. De grootste van deze gemeenschappelijke delers wordt de **grootste gemene deler** genoemd, of kortweg: ggd.

Alle delers van 60 zijn: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30 en 60. Alle delers van 264 zijn: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 12, 22, 24, 33, 44, 66, 88, 132 en 264. Je ziet dat 12 de grootste gemene deler is. In onderstaand voorbeeld wordt een minder omslachtige methode gebruikt om tot dit antwoord te komen.

VOORBEELD
Bereken de grootste gemene deler van 60 en 264.

UITWERKING

- Ontbind 60 en 264 in priemfactoren en onderstreep de factoren die ze gemeenschappelijk hebben: $60 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times 5$ en $264 = \underline{2} \times \underline{2} \times 2 \times \underline{3} \times 11$.
  - Het product van de onderstreepte getallen, dus $2 \times 2 \times 3 = 12$, is de ggd van 60 en 264. Zie ook het plaatje hieronder; dit heet een **Venn-diagram**.



Opgave 85 Bereken de ggd van

a) 8 en 28

b) 15 en 25

c) 6 en 27

d) 1021 en 1021

Opgave 86 Bereken de ggd van

a) 84 en 192

c) 140 en 392

b) 21 en 40

d) 42, 105 en 231

1.5.7 Het kleinste gemene veelvoud

Bij twee natuurlijke getallen zijn er altijd veelvouden te vinden die deelbaar zijn door beide getallen. De kleinste van deze veelvouden wordt het **kleinste gemene veelvoud**, kortweg kgv, genoemd. Je kan ook zeggen:

> Het kgv van twee getallen is het kleinste getal dat in de tafel van het eerste en van het tweede getal zit.

Voorbeelden

Een gemeenschappelijk veelvoud van 4 en 6 is $4 \times 6 = 24$. Maar ook 48 en 240 zijn gemeenschappelijke veelvouden van 4 en 6. Het kleinste gemeenschappelijke veelvoud van 4 en 6 is 12.

Een manier om het kgv van 4 en 6 te vinden:

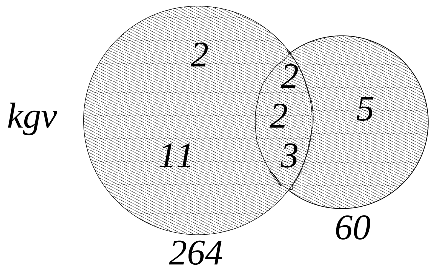
- De tafel van 4 is: 4, 8, 12, 16, enz.
  - De tafel van 6 is: 6, 12, enz.
    Dus het kgv van 4 en 6 is 12.

Een andere manier om een kgv te vinden:

Bereken het kleinste gemene veelvoud van 60 en 264.

Uitwerking

- Ontbind 60 en 264 in priemfactoren en onderstreep het kleinste aantal factoren waarmee je toch nog zowel 60 als 264 kunt maken: $60 = \underline{2} \times \underline{2} \times \underline{3} \times \underline{5}$ en $264 = 2 \times 2 \times \underline{2} \times 3 \times \underline{11}$.
- Het product van de onderstreepte getallen, dus $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 11 = 1320$, is het kgv van 60 en 264. Zie ook het Venn-diagram hieronder.



Opgave 87 Hoe weet je nu zeker dat 1320 het kgv van 60 en 264 is?

Opgave 88 Bereken het kgv van

a) 6 en 27

b) 21 en 40

c) 140 en 392

d) 42, 105 en 231

Opgave 89 Zus en Jet gaan op kamers. Vandaag verlaten beiden het ouderlijk huis. Zus belooft iedere 14 dagen langs te komen; Jet komt iedere 30 dagen op bezoek. Bereken wanneer Zus en Jet voor het eerst weer samen thuis zijn.

1.5.8 Nog eens machten

Je hebt in de vorige paragrafen al de notatie van machten geleerd. Om handig en snel te rekenen is het goed als je een aantal machten en kwadraten uit je hoofd kent. Hieronder staan machten van 3 alvast uitgerekend:

$3^0 = 1$	$3^6 = 729$	$3^{12} = 531441$
$3^1 = 3$	$3^7 = 2187$	$3^{13} = 1594323$
$3^2 = 9$	$3^8 = 6561$	$3^{14} = 4782969$
$3^3 = 27$	$3^9 = 19683$	$3^{15} = 14348907$
$3^4 = 81$	$3^{10} = 59049$	
$3^5 = 243$	$3^{11} = 177147$	

Opgave 90 Leer de eerste zes machten van 3, dus $3^0 = 1$ tot en met $3^5 = 243$ uit je hoofd.

Opgave 91 Maak nog eens het rijtje voor de machten van 2 van $2^0 = 1$ tot en met $2^{10} = 1024$ en leer ze weer uit je hoofd.

Opgave 92 Maak ook een rijtje met de uitkomsten van de kwadraten van de getallen van 1 tot en met 20 en leer ze uit je hoofd.

1.5.9 Toepassing van GGD en KGV

Om breuken te vereenvoudigen kan het handig zijn teller en noemer eerst in priemfactoren te ontbinden. Maar soms zie je uit je hoofd andere delers, die teller en noemer gemeenschappelijk hebben. Vervolgens kunnen in teller en noemer gemeenschappelijke factoren worden weggedeeld. Dan deel je teller en noemer door de ggd!

VOORBEELDEN

- $\frac{90}{378} = \frac{2\times3\times3\times5}{2\times3\times3\times3\times7} = \frac{5}{3\times7} = \frac{5}{21}$
- $\frac{36}{27} = \frac{4\times9}{3\times9} = \frac{4}{3}$
- $\frac{169}{260} = \frac{13^2}{26\times10} = \frac{13\times13}{13\times20} = \frac{13}{20}$

Om breuken op te tellen, moet je eerst gelijknamig maken. De nieuwe noemer is het kgv van de noemers van de breuken.

Kijk maar: $\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{2}{24} + \frac{3}{24} = \frac{5}{24}$; het kgv van 12 en 8 is 24.

Liever niet: $\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{8}{96} + \frac{12}{96} = \frac{20}{96} = \frac{5}{24}$; 96 is wel een veelvoud van 12 en 8, maar niet het kleinste!

Opgave 93 Vereenvoudig:

a) $\frac{63}{147}$ c) $\frac{1210}{2200}$ e) $\frac{1024}{1536}$

b) $\frac{225}{625}$ d) $\frac{324}{144}$ f) $\frac{1485}{2475}$

Opgave 94 Tel op; gebruik het kgv van de noemers.

a) $\frac{2}{21} + \frac{3}{40}$

b) $\frac{5}{6} + \frac{10}{27}$

1.6 Gemengde opgaven

Opgave 95

a) Maak een samenvatting van alle belangrijke regels die je hebt gehad in paragraaf 1.5.

b) Kijk nog eens naar je samenvatting van paragraaf 1.2 t/m 1.4. Weet je alles nog?

Opgave 96 10^{100} wordt ook googol genoemd, dus googol is een 1 met honderd nullen.

Bereken, en geef het antwoord als macht van 10.

a) googol+googol

d) 100^{10}

b) 2 googol×100

e) 100^{100}

c) googol: 2000

f) het kwadraat van googol

Schrijf bij de volgende meerkeuzevragen steeds op hoe je aan je antwoord komt!

Opgave 97 *(Kangoeroe 2001)* Van de getallen $-9, -7, -5, 2, 4$ en 6 worden er twee genomen en met elkaar vermenigvuldigd. Wat is het kleinst mogelijke antwoord dat je zo kunt krijgen?

A) -63 B) -54 C) -18 D) -10 E) 8

Opgave 98 *(Kangoeroe 2001)* Wat is het volgende getal in de rij $4, 6, 10, 18, 34, \ldots$?

A) 52 B) 64 C) 66 D) 72 E) 88

Opgave 99 *(Kangoeroe 2001)* Een koalabeertje kan een eucalyptusboom in 10 uur kaalvreten. Zijn moeder en vader kunnen dat ieder twee keer zo snel. Hoe lang doet het gezin van vader, moeder en kleine koala over het kaalvreten van een eucalyptusboom?

A) 2 uur B) 3 uur C) 4 uur D) 5 uur E) 6 uur

Opgave 100 *(Kangoeroe 2001)* De schaduw van een toren is 4,2 meter lang. Een paaltje van 3 meter hoog staat naast de toren en geeft een schaduw van 12 cm. Hoe hoog is de toren?

A) 95 m B) 100 m C) 105 m D) 110 m E) 120 m

Opgave 101 *(Kangoeroe 2001)* Tom en Jerry doen mee aan een sponsorloop op een atletiekbaan. Ze lopen beiden met een constante snelheid. Tom loopt 5 rondjes per 12 minuten, Jerry loopt 3 rondjes per 10 minuten. Ze starten tegelijk. Hoeveel rondjes hebben ze samen in totaal gelopen als ze voor het eerst weer tegelijk over de finishlijn komen?

A) 3 B) 43 C) 86 D) 90 E) 135

Opgave 102 *(Kangoeroe 2001)* Er zijn positieve gehele getallen waarvan de som van de cijfers gelijk is aan 2001. Met welk cijfer begint het kleinste van deze getallen?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Opgave 103 *(Kangoeroe 2001)* Een vader vertelt: "Als ik de leeftijden van mijn kinderen met elkaar vermenigvuldig, dan is de uitkomst 1664. De jongste is half zo oud als de oudste." Hoeveel kinderen heeft deze vader?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Opgave 104 *(Kangoeroe 2002)* Jan leest iedere dag precies 23 bladzijden. Hij begint vandaag aan een boek van 2002 bladzijden. Hoeveel dagen heeft hij nodig om het boek helemaal te lezen en hoeveel bladzijden leest hij op de laatste dag van een nieuw boek?

A) 87 dagen en 0 blz. van het nieuwe boek
B) 87 dagen en 1 blz. van het nieuwe boek
C) 88 dagen en 20 blz. van het nieuwe boek
D) 88 dagen en 21 blz. van het nieuwe boek
E) 88 dagen en 22 blz. van het nieuwe boek

Opgave 105 *(Kangoeroe 2002)* Welke van de volgende breuken is het grootst?

A) $\frac{7}{8}$ B) $\frac{66}{77}$ C) $\frac{555}{666}$ D) $\frac{4444}{5555}$ E) $\frac{33333}{44444}$

Opgave 106 *(Kangoeroe 2002)* In Canada spreekt een aantal mensen alleen Engels, een aantal alleen Frans en de rest spreekt Frans én Engels. 85% spreekt Engels, 75% spreekt Frans. Hoeveel procent spreekt Frans én Engels?

A) 25% B) 40% C) 50% D) 57% E) 60%

Opgave 107 *(Kangoeroe 2002)* Als Mr. Bean stilstaat op een roltrap, is hij na 60 seconden boven. Als de roltrap stilstaat en Mr. Bean loopt erop, is hij na 90 seconden boven. Na hoeveel seconden is Mr. Bean boven als hij loopt op de bewegende roltrap?

A) 30 B) 36 C) 45 D) 50 E) 75

Opgave 108 *(Kangoeroe 2002)* Vijf meisjes gaan in tweetallen in elke combinatie op een weegschaal staan. De gewichten die ze aflezen zijn 90 kg, 92 kg, 93 kg, 94 kg, 95 kg, 96 kg, 97 kg, 98 kg, 100 kg en 101 kg. Hoe zwaar zijn de meisjes samen?

A) 225 kg B) 230 kg C) 239 kg D) 240 kg E) 250 kg

Opgave 109 *(Kangoeroe 2002)* Een kangoeroe wil van de dom in Utrecht naar de Dam in Amsterdam gaan (37 km). De eerste sprong is 1 meter; iedere volgende sprong is het dubbele van de vorige. Na hoeveel sprongen is de kangoeroe het dichts bij de Dam? (Dan stopt hij met springen.)

A) 4 B) 5 C) 14 D) 15 E) 16

Opgave 110 *(Kangoeroe 2002)* Dineke heeft een klok laten vallen. De wijzerplaat is in drie stukken gebroken. Als je van ieder stuk de getallen erop optelt, dan komt er telkens hetzelfde uit. De breuklijnen zijn recht en gaan niet dwars door de getallen op de wijzerplaat. Welke uitspraak is juist?

A) 12 en 3 zitten in verschillende stukken
B) 7 en 5 zitten in verschillende stukken
C) 2, 11 en 9 zitten in hetzelfde stuk
D) 8 en 4 zitten in hetzelfde stuk
E) 11, 1 en 5 zitten in hetzelfde stuk

Opgave 111 *(Kangoeroe 2003)* In een kooi in een dierenwinkel zaten gisteren vijf kangoeroes. Hun gemiddelde prijs bedroeg 6000 euro. Vanmorgen tijdens het schoonmaken van de kooi ontsnapte de liefste kangoeroe. De overige vier kangoeroes kosten gemiddeld 5000 euro. Hoeveel euro was de prijs van de ontsnapte kangoeroe?

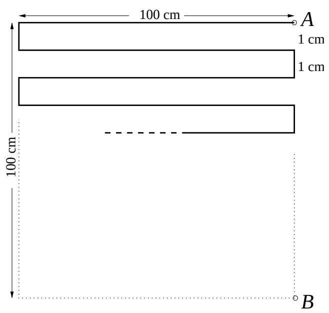
A) 5000 B) 6000 C) 6500 D) 8000 E) 10000

Opgave 112 *(Kangoeroe 2003)* Welke van de volgende getallen levert vermenigvuldigd met 32 de meeste nullen aan het eind op?

A) 7200 B) 3125 C) 5000 D) 7500 E) 10000

Opgave 113 *(Kangoeroe 2003)*

De punten A en B liggen 100 cm van elkaar af. De 'zigzaglijn' tussen A en B bestaat uit afwisselend stukken van 100 cm en 1 cm. De opvolgende stukken maken rechte hoeken met elkaar. Hoeveel cm is de zigzaglijn lang?



A) 909 B) 2500 C) 9900 D) 10100 E) 10200

Opgave 114 *(Kangoeroe 2003)* De echte delers van het getal 12 zijn 2, 3, 4 en 6, maar 1 en 12 niet. Minoes zoekt de getallen met de eigenschap dat de grootste echte deler 15 keer zo groot is als de kleinste echte deler. Hoeveel van die getallen zijn er?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) ∞

("∞" betekent *oneindig*)

Opgave 115 *(Kangoeroe 2004)* Bereken:
$(1-2)-(3-4)-(5-6)-\ldots-(99-100)=?$

A) -48 B) 0 C) 48 D) 49 E) 50

Opgave 116 *(Kangoeroe 2004)* In een zeker jaar waren er meer donderdagen dan dinsdagen. Welke weekdag kwam het meest voor in het daaropvolgende jaar? Geen van beide jaren was een schrikkeljaar.

A) dinsdag B) woensdag C) vrijdag D) zaterdag E) zondag

Opgave 117 *(Kangoeroe 2004)* Vijf kinderen hebben ieder een getal gekozen. Ze hadden elk de keuze uit 1, 2 of 4. Als de gekozen getallen met elkaar worden vermenigvuldigd, is de uitkomst een van de volgende getallen. Welk getal is dat?

A) 100 B) 120 C) 256 D) 768 E) 2048

Opgave 118 *(Kangoeroe 2004)* Sietse heeft twee positieve gehele getallen in gedachten. Geen van beide is deelbaar door 10, maar hun product 10000 is dat wel. Wat is hun som?

A) 641 B) 1000 C) 1024 D) 1258 E) 2401

Opgave 119 *(Kangoeroe 2004)* De huizen in een straat zijn genummerd van 1 t/m 200. Tweehonderd kangoeroes sturen kaartjes naar huizen in deze straat. Kangoeroe 1 stuurt een kaartje naar huisnummers 1, 2, 3, 4, enz. Kangoeroe 2 stuurt een kaartje naar nummer 2, 4, 6, 8, enz. Kangoeroe 3 stuurt een kaartje naar nummer 3, 6, 9, enz., kangoeroe 4 naar 4, 8, 12, enz. Hoeveel kaartjes krijgt het huis met nummer 120?

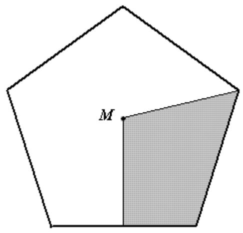
A) 12 B) 16 C) 20 D) 24 E) 32

Opgave 120 *(Kangoeroe 2006)* $20\times(0+6)-(20\times 0)+6=$

A) 0 B) 12 C) 106 D) 114 E) 126

Opgave 121 *(Kangoeroe 2006)*

Van de regelmatige vijfhoek is M het middelpunt. Hoeveel procent van de vijfhoek is grijs?



A) 10 B) 20 C) 25 D) 30 E) 40

Opgave 122 *(Kangoeroe 2006)* Van de 2006 leerlingen op een school doen er 1500 mee aan de Kangoeroewedstrijd. Aan de Wiskundeolympiade doen 1200 leerlingen mee, terwijl 6 leerlingen aan geen van beide wedstrijden meedoen. Hoeveel leerlingen doen mee aan beide wedstrijden?

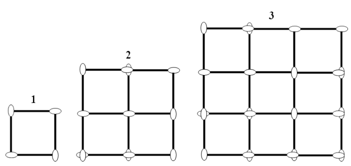
A) 300 B) 500 C) 700 D) 850 E) 950

Opgave 123 *(Kangoeroe 2006)* Harry, Ron en Hermelien hebben een tent gekocht. Harry heeft 60% van de prijs betaald. Ron heeft 40% van de rest voor zijn rekening genomen. Hermelien moest daarna nog 30 euro bijleggen. Hoeveel euro kostte de tent?

A) 50 B) 60 C) 126 D) 150 E) 200

Opgave 124 *(Kangoeroe 2006)*

Hermelien maakt van lucifers een vierkant. Daarna maakt zij een groter vierkant door kleine vierkantjes aan te leggen.
Zo gaat zij door, tot en met vierkant 31. Hiernaast zie je de vierkanten 1, 2 en 3.
Hoeveel lucifers heeft vierkant 31 meer dan vierkant 30?



A) 61 B) 120 C) 124 D)148 E) 254

Opgave 125 *(Kangoeroe 2006)* We bekijken alle positieve gehele getallen waarvan de som van de cijfers gelijk is aan 2006. Met welk cijfer begint het kleinste van deze getallen?

A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8

Opgave 126 *(Kangoeroe 2006)* Het product van twee gehele getallen is gelijk aan $2^5 \times 3^2 \times 5 \times 7^3$. De som van deze twee getallen kan deelbaar zijn door:

A) 3 B) 5 C) 8 D) 10 E) 49

Hoofdstuk 2

Meetkundige constructies

2.1 Inleiding: Bouwstenen van de meetkunde

Een meetkundige constructie is een tekening waarin allerlei figuren zoals driehoeken, vierhoeken, lijnen en cirkels een rol spelen en waarbij precies beschreven staat hoe die tekening ontstaat. Later zullen we zien dat bij een constructie ook altijd een bewijs hoort: waarom bereik je met een constructie datgene wat je wou bereiken met die constructie.

Constructies zijn van oudsher altijd belangrijk geweest voor het ontwerpen en voor het bouwen van gebouwen. Als Egyptenaren bijvoorbeeld een piramide bouwden moesten ze beginnen met het uitzetten van een groot vierkant grondvlak. Hoe deden ze dat, hoe konden ze het doen? De Grieken werden meesters in het bedenken van goede constructies en zagen voor het eerst ook de noodzaak (en het plezier!) van het bewijzen van de juistheid van die constructies. Hiermee legden ze de basis voor de moderne wiskunde.

De Grieken stonden bij constructies alleen het gebruik van passer en liniaal toe. Daarbij mocht de liniaal uitsluitend gebruikt worden om lijnen door twee gegeven (of al eerder geconstrueerde) punten te trekken. Er stond dus *geen schaalverdeling* op de liniaal van de Grieken! Met de passer kon je cirkels tekenen met een gegeven middelpunt die door een gegeven punt gingen. Een van de grote voordelen van deze manier van construeren is dat je ze op iedere schaal goed kon uitvoeren. Een passer zowel als een liniaal kan je namelijk heel goed vervangen door een simpel touwtje. Zo kan je bij bijvoorbeeld het aanleggen van een tuin of het bouwen van een gebouw een constructie in het groot uitvoeren die je eerst op papier in het klein hebt gedaan.

Tegenwoordig gebruiken we ook andere hulpmiddelen, zoals de geodriehoek. Op papier gaat dat vaak wel zo snel en makkelijker. In dit hoofdstuk ga je weliswaar leren hoe je een geodriehoek moet gebruiken maar de echte constructies mag je uitsluitend met passer en liniaal doen.Zoals de Grieken dat deden.

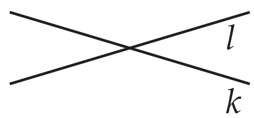
Benodigdheden:

a) potlood,
b) passer,
c) geodriehoek,
d) gum,
e) 2 kleurpotloden,
f) blanco schrift (dus géén lijntjes en géén ruitjes).

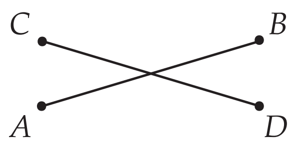
De bouwstenen van constructies

We gaan er vanuit dat een **punt** oneindig klein is, maar we *tekenen* een punt meestal als een vette stip. Anders kan je hem niet zien. Punten kan je een naam geven. Daarvoor worden altijd hoofdletters gebruikt: A, B, C etc.

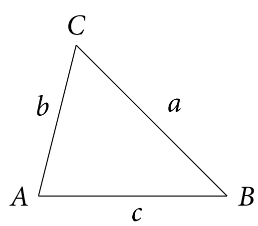
Een (rechte) **lijn** is in principe oneindig lang (en heeft geen dikte!), maar we tekenen altijd maar een stukje ervan. Een lijn wordt altijd aangegeven met een kleine letter: *k, l, m, n* etc.



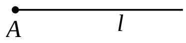
Een **lijnstuk** is het stukje lijn dat tussen twee gegeven punten zit en wordt aangeven door het begin- en eindpunt: *AB, ST* etc.



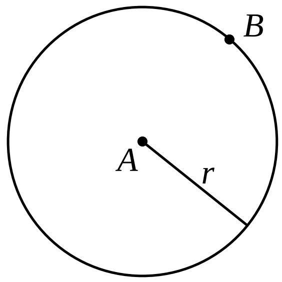
Een lijnstuk wordt soms ook aangegeven met één kleine letter, zie hiernaast: lijnstuk *AB* is hetzelfde als lijnstuk *c*, enz.



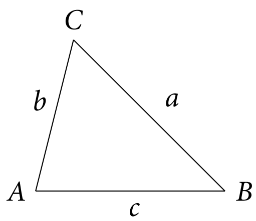
Een **halve lijn** begint bij een punt, bijvoorbeeld A, maar loopt vervolgens oneindig lang door. Voor halve lijnen gebruik je ook kleine letters, bijvoorbeeld l.



Een **cirkel** bestaat uit allemaal punten die even ver vanaf een vast punt liggen (het *middelpunt*). Die afstand wordt de *straal* genoemd. Een cirkel geef je aan met het symbool $\odot(..,..)$ waarbij je op de stipjes eerst het middelpunt van de cirkel en daarna de straal opschrijft. Die straal is vaak een lijnstuk en dan schrijf je de naam van het lijnstuk op. Bijv. $\odot(A,r)$ of $\odot(A,AB)$. De letter r komt van het Latijnse woord 'radius' voor straal.

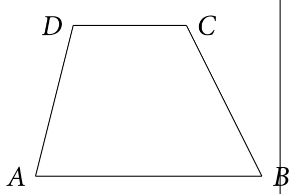


Een **driehoek** onstaat als je drie punten die niet op één lijn liggen met lijnstukken verbindt. De punten heten de **hoekpunten** en de lijnstukken de **zijden** van de driehoek.

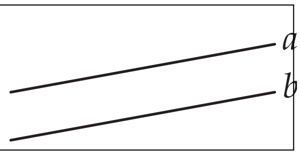


Een driehoek geef je aan met het symbool $\triangle$, gevolgd door de hoekpunten. De driehoek in de figuur heet $\triangle ABC$.

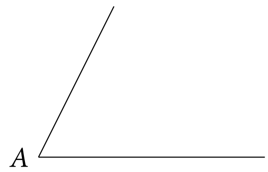
Een **driehoek** of een **vierhoek** geef je aan door de namen van de hoekpunten achter elkaar op te schrijven. Let daarbij op de volgorde. In het voorbeeld is $ABCD$ goed maar $ABDC$ niet goed als notatie voor de vierhoek. $BCDA$ of $DCBA$ zou ook kunnen, maar de afspraak is: in alfabetische volgorde tegen de wijzers van de klok in.



Twee lijnen zijn **evenwijdig** als ze in één vlak liggen en elkaar niet snijden. Je schrijft het in het kort zo op: $a \parallel b$.

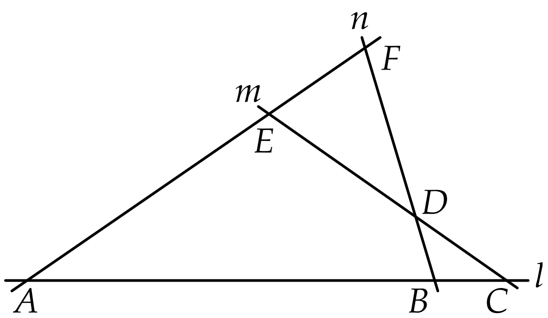


Een **hoek** wordt gevormd door twee halve lijnen die in een punt, het hoekpunt beginnen. De twee halve lijnen worden de benen van die hoek genoemd. Een hoek kan je aangeven met het teken $\angle$ gevolgd door de naam van het hoekpunt of de namen van twee punten op de benen met in het midden het hoekpunt. Bijv. $\angle A$. In het plaatje hiervoor met vierhoek $ABCD$ zie je bijvoorbeeld $\angle A = \angle BAD$ en $\angle D = \angle ADC$.



Let op: tekeningen moeten altijd met potlood worden gemaakt!

Opgave 1 Deze opgave gaat steeds over het onderstaande figuur:



a) De lijn l gaat door A en B, de lijn m door E en D en de lijn n door F en D. Geef het snijpunt van l en m, van l en n en het snijpunt van m en n.

b) Het lijnstuk AB is wel getekend maar AD is niet getekend. Geef van de volgende lijnstukken aan of ze wel of niet getekend zijn: BC, EC, BE, FA, FC, BD.

c) $\triangle BCD$ is wel getekend maar $\triangle BCF$ niet. Schrijf alle driehoeken op die wel getekend zijn.

d) Geef tenminste vier notaties voor vierhoek $ABDE$ die niet correct zijn.

e) In het figuur is $\angle EAB$ een hoek die getekend is maar $\angle AEB$ is niet getekend. Geef van de volgende hoeken aan of ze getekend zijn of niet: $\angle ABD$, $\angle DBA$, $\angle BAD$, $\angle ACD$, $\angle DCB$, $\angle AFB$, $\angle DEA$

f) Geef een andere notatie voor $\angle AEC$. Waarom is $\angle E$ hier geen goede notatie?

Opgave 2 Teken drie punten A, B en C, die niet op één lijn liggen en teken vervolgens de cirkels $\odot(C, AC)$, $\odot(A, AB)$, $\odot(A, BC)$.

2.2 Gelijkzijdige driehoeken en regelmatige zeshoeken

In deze paragraaf ga je je eerste constructies maken.

Je leraar zal je uitleggen hoe je een passer vast moet houden, gebruikt en onderhoudt. Als liniaal kan je een geodriehoek gebruiken, maar vergeet niet dat je bij wiskundige passer-en-liniaal-constructies niet de schaalverdeling gebruikt. Je mag je liniaal dus alleen gebruiken om een lijn langs te tekenen door twee gegeven punten. Je leraar zal je ook vertellen wat wiskundigen verstaan onder "gegeven punten" en onder "willekeurige punten". Die woorden zal je vaak in een beschrijving van een constructie tegen komen.

Opgave 3 Je eerste constructie wordt: het midden van een gegeven lijnstuk bepalen. Dat mag dus even niet met de centimeterverdeling van je geodriehoek!

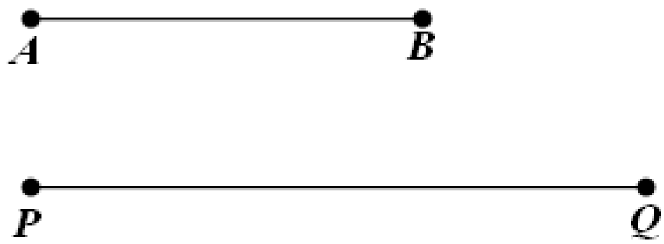
Neem lijnstuk AB over en teken vervolgens twee cirkels $\odot(A, r)$ en $\odot(B, r)$ met straal r iets kleiner dan de lengte van AB. Noem de snijpunten van de cirkels C en D. Zet deze twee letters dus bij de punten. Het maakt niet uit bij welke van de punten je welke letter zet! Teken nu de lijn l door C en D. Het snijpunt van l met AB noemen we M. M is nu het midden van AB! Dat was hem dan: je eerste constructie!

Opgave 4

a) In de vorige opgave had je natuurlijk best twee cirkels kunnen tekenen met een iets grotere of kleinere straal. Als ze maar dezelfde straal hadden. Maar als je de straal te groot of te klein neemt dan gaat het fout. Wat gaat er dan fout? Omschrijf zelf hoe je de straal kunt kiezen.

b) Ook hoefde je niet de hele cirkels te tekenen. Het gaat immers alleen om de snijpunten! Ga nu, met deze kennis gewapend, aan de slag om de middens te bepalen van drie lijnstukken: CD, EF en GH. Teken eerst CD en construeer het midden. Doe hetzelfde bij EF en GH.

Opgave 5 a) Neem lijnstuk AB over en teken vervolgens $\odot(A, AB)$ en $\odot(B, AB)$. Noem de snijpunten van de cirkels$C$ en D. Teken nu de lijnstukken AC, AD, BC en BD. Er zijn nu twee driehoeken ontstaan. Deze driehoeken heten **gelijkzijdig**, omdat alle drie de zijden even langzijn.



b) Om een gelijkzijdige driehoek te tekenen vanuit een gegeven zijde hoef je niet de hele cirkels te tekenen. Het gaat immers alleen om de snijpunten! Neem lijnstuk PQ over en teken vervolgens een gelijkzijdige driehoek PQR, waarbij je alleen kleine stukjes van de cirkels tekent. Teken de cirkelstukjes dunnetjes maar gum ze vooral niet uit.

De constructie van een gelijkzijdige driehoek

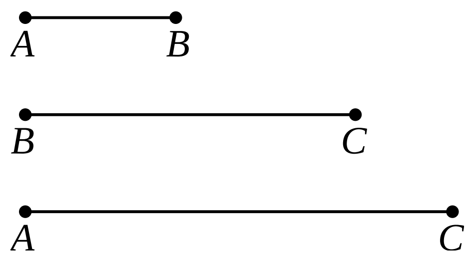
- Neem lijnstuk PQ over.
- Teken $\odot(P, PQ)$ en $\odot(Q, PQ) \Rightarrow$ snijpunten R en S.
- Teken ΔPQR of ΔPQS.

Opgave 6 Schrijf de constructie van het midden van een lijnstuk AB ook zo puntsgewijs als hierboven op.

Opgave 7 a) Teken, in je schrift, twee punten A en B op een afstand van elkaar van ongeveer twee keer de dikte van je duim. Teken de cirkels $\odot(A, r)$ en$\odot(B, r)$ met r iets groter dan AB. Het snijpunt van de cirkels boven AB noemen we C. Teken ΔABC. Deze driehoek heeft twee gelijke zijden en noemen we een **gelijkbenige driehoek**.

b) Om een gelijkbenige driehoek te construeren hoef je niet weer hele cirkels te tekenen. Teken nu eerst een lijnstuk PQ. Teken vervolgens $\odot(P,r)$ en $\odot(Q,r)$ met alleen twee kleine stukjes van de cirkel boven PQ. Dit leidt tot snijpunt R. Teken tot slot ΔPQR.

c) Nu ga je een driehoek tekenen met zijden AB, BC en AC, die hieronder staan afgebeeld. Neem AB over, omcirkel vervolgens punt A met een straal van lengte AC en punt B met een straal van lengte BC. Deze twee cirkels snijden elkaar in het gezochte punt C (er zijn weer twee mogelijkheden). Je hebt nu een driehoek met drie verschillende gegeven zijden geconstrueerd. Een belangrijke constructie die je nog vaak zal gebruiken.



d) Doe het zelfde nu voor een driehoek met 3 andere zijden.

e) Het is niet altijd mogelijk om met drie gegeven zijden een driehoek te tekenen. Geef twee voorbeelden waarbij dit niet lukt.

Opgave 8

a) Teken een grote cirkel $\odot(M,r)$. Neem een willekeurig punt A op de cirkel. Pas nu 6 keer de straal MA af op de cirkel zodat je de punten B, C, D, E, F op de cirkel krijgt. Als je het goed doet kom je weer precies in A uit. Dat gaan we later dit jaar echt bewijzen! De punten $A, B \ldots, F$ vormen een **regelmatige zeshoek** ook wel **hexagon** genoemd.

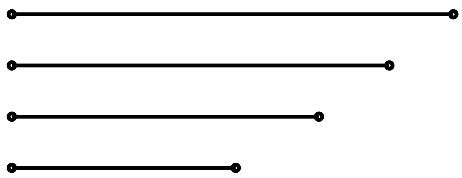
b) Verbind nu AC, CE, EA en BD, DF, FB. Je krijgt een figuur met twee gelijkzijdige driehoeken. Dit figuur wordt wel Davidsster genoemd en is een belangrijk Joods symbool.

c) Verbind nu met een kleurpotlood niet alleen AB, BC etc. maar ook AM, BM, etc (M was het middelpunt van de cirkel, weet je nog?). Hoeveel gelijkzijdige driehoeken heb je nu gekregen?

Opgave 9 Schrijf puntsgewijs de constructie van de regelmatige zeshoek op.

Opgave 10

a) Het is ook mogelijk om een vierhoek met vier gegeven zijden te tekenen, maar daar is een probleem bij: er zijn een heleboel van. Teken zelf drie vierhoeken met zijden van de lengte van de lijnstukken hieronder. Je mag twee van de zijden, die hieronder zijn getekend, willekeurig (maar wel aan elkaar vast getekend) kiezen. Maar bij de laatste twee moet je je passer gebruiken om ze te tekenen. Je zult zie dat dat niet altijd kan. Probeer maar en geef niet te snel op.



b) Ook bij vierhoeken is het niet altijd mogelijk om bij vier gegeven zijden de vierhoek te tekenen. Geef een voorbeeld waarbij dat niet kan.

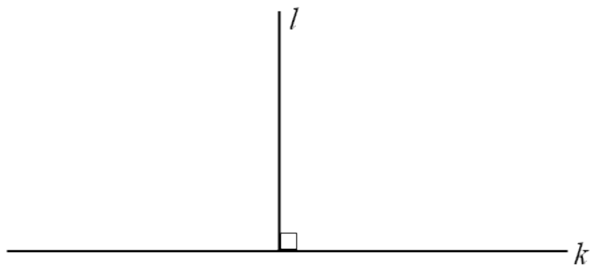
c) Bij de vorige opgave tekende je een regelmatige zeshoek met zes even lange zijden. Deze was regelmatig, omdat niet alleen de zijden even lang waren maar ook de hoeken even groot. Als de hoeken niet even groot hoeven te zijn, kan je een heleboel verschillende zeshoeken tekenen met zes gelijke zijden. Teken een zeshoek die niet regelmatig is, maar wel zes gelijke zijden heeft.

2.3 Loodlijnen

Je hebt geleerd dat een hoek bestaat uit twee halve lijnen (de **benen** van de hoek) die in hetzelfde punt beginnen (het **hoekpunt**). Als die twee lijnen in elkaars verlengde liggen dan is het net of het een hele rechte lijn is, met een punt erop. Je zult het niet geloven , maar zo een hoek is zo bijzonder dat er zelfs een naam voor is: **een gestrekte hoek**.

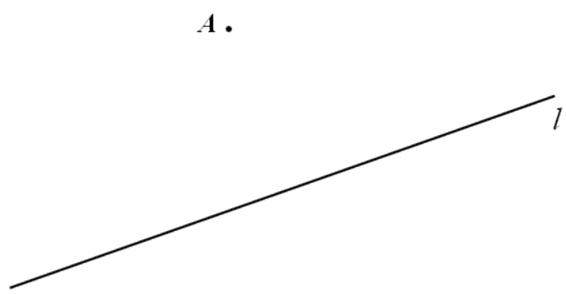
gestrekte hoek

Als je een gestrekte hoek in twee even grote delen deelt dan krijg je twee hoeken die **recht** zijn. Zie het figuur hieronder. We zeggen dat lijn l **loodrecht** staat op lijn k, of ook wel dat dat l een **loodlijn** is op k. De wiskundige notatie is $l \perp k$. (Spreek uit: l loodrecht op k.) Je ziet ook dat $k \perp l$.



2 rechte hoeken

In een tekening geven we een rechte hoek aan zoals hierboven. We gaan nu een loodlijn construeren op een lijn $l$vanuit een punt A, dat niet op lijn l ligt. We noemen dit: een loodlijn neer laten vanuit A op l.



Bedenk dat een lijn oneindig lang is. Oneindig lang tekenen kan natuurlijk niet, maar wek niet de suggestie dat je lijn begint of eindigt in A of op l!

Opgave 11 Teken een lijn l en A niet op l. Teken een cirkel met middelpunt A met een straal die iets groter is dan de afstand van A tot l. Deze cirkel snijdt l in de punten B en C. Construeer nu het midden van lijnstuk BC. (Weet je nog hoe dat ging? Zo nee, zoek het op in je schrift.) De lijn door het midden van BC en A is de gevraagde loodlijn!

De constructie van het neerlaten van een loodlijn vanuit A op l puntsgewijs:

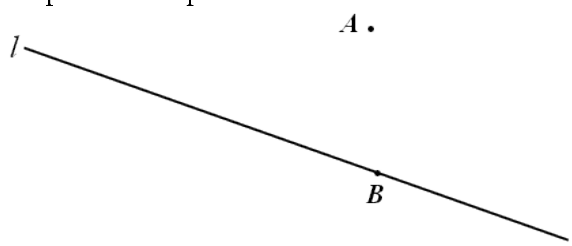
- Teken l
- Teken een punt A dat niet op l ligt.
- Teken $\odot(A, r)$ met een $r$straal welke groter is dan de afstand van A tot l. Dit levert twee snijpunten, B en C op.
- Construeer nu het midden van BC.
- De lijn door het midden van BC is de gevraagde loodlijn door A op l.

Opgave 12 Als A een punt op een lijn l is, dan zeggen we dat we een loodlijn oprichten.

a) Probeer zelf uit te vinden hoe deze constructie moet.

b) Beschrijf je constructie puntsgewijs.

Opgave 13 a) Neem de figuur hieronder over (hoeft niet exact) en teken de loodlijn m vanuit A op de lijn l. Richt daarna de loodlijn n op vanuit B op l.



b) Wat voor bijzonders zie je aan de lijnen m en n? Kijk bij de bouwstenen van constructies in paragraaf 2.1 hoe je dit kunt noteren.

De **middelloodlijn** van een lijnstuk AB is de loodlijn op AB door het midden van AB.

Opgave 14

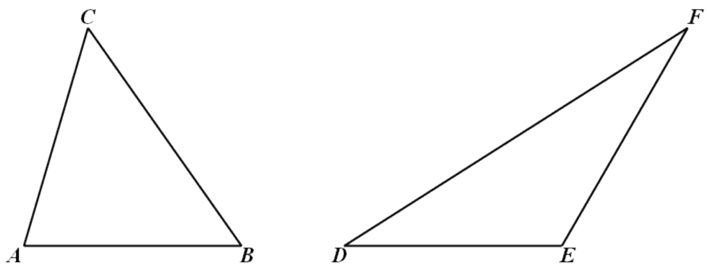
a) Teken een lijnstuk AB en de middelloodlijn van AB. Dat gaat het gemakkelijkst met de passer. Probeer zelf hoe dat kan. Gebruik twee cirkels, maar teken alleen (dun!) kleine stukjes van die cirkels.

b) Doe hetzelfde nog eens voor een lijnstuk CD, dat tweemaal zo lang is als AB. Maakt het veel uit welke straal je neemt voor de cirkels? Hoe willekeurig kan de straal zijn? Omschrijf in je eigen woorden hoe je de straal moet kiezen.

Opgave 15 Schrijf de constructie van de middelloodlijn van lijnstuk PQ puntsgewijs op.

Opgave 16

a) Een driehoek heeft drie zijden en van die drie lijnstukken kan je de drie middelloodlijnen tekenen. Neem ΔABC en ΔDEF hieronder over (hoeft niet exact, maar zorg dat ze niet gelijkbenig of gelijkzijdig zijn!) en construeer in beide driehoeken de middelloodlijnen van de zijden.



b) Als je het goed gedaan hebt zal je zien dat de drie middelloodlijnen van een driehoek steeds door één punt gaan. Dat dit altijd zo is, gaan we later bewijzen. Bij $\triangle DEF$ ligt het snijpunt buiten de driehoek! Zet een M bij het snijpunt van de middelloodlijnen. Zet nu je ijzeren passerpunt in M en teken vervolgens de cirkel die door de hoekpunten gaat. Doe dit ook voor de andere driehoek. Als je het goed gedaan hebt, gaan deze cirkels door alle hoekpunten. Zo'n cirkel heet de **omgeschreven cirkel** van de driehoek.

Een **hoogtelijn** in een driehoek is de loodlijn vanuit een hoekpunt op de zijde tegenover dat hoekpunt.

Opgave 17

a) Neem ΔABC uit de vorige opgave nog eens over (weer: niet gelijkbenig en niet gelijkzijdig!) en construeer nu de hoogtelijnen. Daarvoor laat je steeds een loodlijn neer vanuit een hoekpunt op de zijde die er tegenover ligt. Als je het goed doet zal je zien dat de drie hoogtelijnen van een driehoek ook door één punt gaan. Is dat hetzelfde punt als het snijpunt van de middelloodlijnen, of is het een ander punt? Zet een S bij het snijpunt van de drie hoogtelijnen.

b) Bij stomphoekige driehoeken, zoals $\triangle DEF$ kun je ook de drie hoogtelijnen tekenen. Alleen moet je daarvoor DE en FE verlengen. Neem $\triangle DEF$ uit de vorige opgave nog eens over, verleng DE (van D naar E, dus naar rechts) en verleng FE (naar onderen). Construeer nu de drie hoogtelijnen. Zet een S bij het snijpunt van de drie hoogtelijnen.

Een **zwaartelijn** in een driehoek is de lijn vanuit een hoekpunt naar het midden van de zijde tegenover dat hoekpunt.

Opgave 18

a) Teken nu nog een keer $\triangle ABC$ en $\triangle DEF$ en geef met behulp van passer en liniaal of met behulp van je geodriehoek het midden van de drie zijden aan. Teken vervolgens de lijnstukken die vanuit een hoekpunt van de driehoek naar het midden van de tegenoverliggende zijde gaan. Deze lijnen zijn de zwaartelijnen van de driehoek. Ook deze gaan door één punt: het **zwaartepunt**. Zet een Z bij dit punt.

b) Waar zouden die namen zwaartelijn en zwaartepunt vandaan komen?

Opgave 19 Je kunt loodlijnen ook gebruiken om evenwijdige lijnen te construeren. Een belangrijke constructie is: een lijn door een gegeven punt evenwijdig aan een gegeven lijn.

Teken een lijn l en een punt A dat niet op l ligt. Construeer vervolgens de loodlijn m vanuit A op l. Richt dan de loodlijn k op m vanuit het punt A op. Deze lijn k is de gevraagde lijn! (op je geodriehoek heb je voor dit doel trouwens evenwijdige lijntjes zitten. Dat gaat eenvoudiger, maar... een geodriehoek hadden de Grieken nu eenmaal niet)

Opgave 20 Begin met een willekeurig punt A en een lijn l door A. Construeer nu de loodlijn m op l vanuit A. Neem een willekeurig punt B op m en richt ook daar een loodlijn k op in B. Neem een willekeurig punt C op k en richt daar nu weer een loodlijn n op in C. Deze loodlijn snijdt l in het punt D.

De vierhoek $ABCD$ die nu ontstaan is heet een **rechthoek**, want hij heeft vier rechte hoeken!

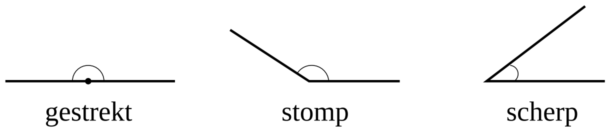
Opgave 21 Een **vierkant** is een rechthoek waarvan de vier zijden even lang zijn.

a) Teken een vierkant met passer en liniaal. Probeer een zo handig mogelijke constructie te vinden.

b) Beschrijf je constructie puntsgewijs.

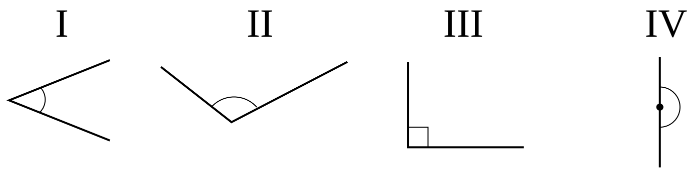
2.4 Hoeken

In de inleiding heb je kunnen lezen wat een hoek eigenlijk is: twee halve lijnen (de benen van de hoek) die in een punt samenkomen (het hoekpunt). Als de twee halve lijnen in elkaars verlengde liggen dan heb je een gestrekte hoek. Als je een gestrekte hoek in twee gelijke delen verdeelt dan krijg je twee rechte hoeken. Een hoek die kleiner is dan een rechte hoek heet een **scherpe hoek**. Een hoek die groter is dan een rechte hoek maar kleiner dan een gestrekte hoek heet een **stompe hoek**.



Opgave 22 a) Teken een gestrekte hoek, een rechte hoek, een scherpe en een stompe hoek.

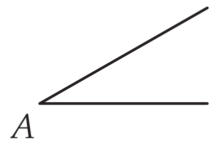
b) Zeg van de volgende hoeken of ze recht, scherp, stomp of gestrekt zijn:



> De (halve) lijn die een hoek in twee gelijke hoeken verdeelt, heet de **bissectrice** van die hoek.

Opgave 23 Met passer en liniaal kan je gemakkelijk een bissectrice construeren.

a) Neem de hoek hieronder over, zonder $\angle A$ te meten (hij hoeft niet exact hetzelfde te zijn) en teken een deel vande cirkel om A, kies daarbij zelf de lengte van de straal. Noem de snijpunten met de benen van $\angle A$: punt B en punt C.



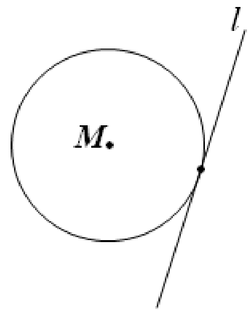
b) Laat dezelfde afstand tussen de passerpoten staan. Teken een deel van de cirkels om B en C. Deze cirkels snijden elkaar (natuurlijk) in A maar ook in een tweede punt dat we D noemen.

c) De halve lijn die in A begint en door D loopt is nu de bissectrice van $\angle A$. Hadden we hetzelfde kunnen bereiken als we begonnen waren met een cirkel met een kleinere of grotere straal?

Opgave 24 Voer dezelfde constructie nu nog eens uit met een stompe $\angle B$. Teken de hulpcirkels heel dun en probeer er zo klein mogelijke stukjes van te tekenen.

Opgave 25 Schrijf puntsgewijs de constructie van de bissectrice van een hoek op.

De lijn l **raakt** $\odot(M, r)$ als l slechts één punt met de cirkel gemeen heeft.



Opgave 26 a) Teken een cirkel met middelpunt M en een punt P buiten de cirkel. Hoeveel raaklijnen van de cirkel gaan door P?

Je kunt zo op het oog wel een lijn door P tekenen die de cirkel lijkt te raken, maar dat is niet precies genoeg. Om een raaklijn te construeren, moet je precies weten welk punt van de cirkel op de raaklijn ligt:

b) Construeer het midden N van PM. Teken $\odot(N, MN)$. De snijpunten van de cirkels noem je S en T. Teken PS. Je hebt nu een raaklijn van de cirkel door P geconstrueerd. De andere raaklijn is PT.

Opgave 27

a) Teken een lijn l en een punt P dat niet op de lijn ligt.

Je kunt zo op het oog wel een cirkel om P tekenen die l lijkt te raken, maar dat is niet precies genoeg. Om deze cirkel te construeren moet je precies weten welk punt van l op de cirkel ligt:

b) Construeer de loodlijn vanuit P op l. Het punt waar l en de loodlijn elkaar snijden noem je S. Teken $\odot(P, PS)$. Je hebt nu de cirkel om P geconstrueerd die l raakt.

- Een scherphoekige driehoek is een driehoek met drie scherpe hoeken.
- Een stomphoekige driehoek is een driehoek met één stompe hoek.
- Een rechthoekige driehoek is een driehoek met één rechte hoek.

Opgave 28

a) Teken een zo groot mogelijk scherphoekige driehoek $\triangle ABC$. Construeer de bissectrices.

b) Als je nauwkeurig hebt gewerkt, gaan de bissectrices door één punt. Noem dit punt M.

c) Construeer de cirkel om M die zijde AB raakt. Als je nauwkeurig heb gewerkt zie je dat deze cirkel tevens de andere twee zijden raakt. Deze cirkel heet daarom de **ingeschreven cirkel** van $\triangle ABC$.

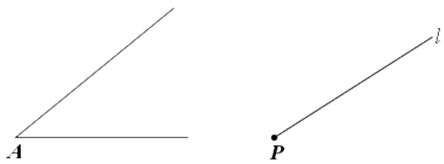
d) Construeer de ingeschreven cirkel van een stomphoekige driehoek.

Een belangrijke constructie heet **het overbrengen van een hoek**. Er is dan een hoek gegeven en een halve lijn. Je moet een hoek construeren die even groot is als de gegeven hoek en waarvan de halve lijn een van de twee benen is. Er zijn (meestal) twee oplossingen! Met de geodriehoek kan je natuurlijk gewoon de gegeven hoek meten en dan vanuit de halve lijn een even grote hoek tekenen. De ene kant op of de andere kant op. Maar met passer en liniaal gaat het zo:

Opgave 29

a) Hieronder is $\angle A$ de gegeven hoek die we moeten overbrengen naar de halve lijn l. Neem de figuur over (hoeft niet exact!) en voer deze constructie uit:

- Teken $\odot(A, r) \Rightarrow$ snijpunten B en C met de benen van $\angle A$.
- Teken $\odot(P, r) \Rightarrow$ snijpunt Q met l (zelfde straal!).
- Teken $\odot(Q, BC) \Rightarrow$ snijpunten R en S met $\odot(P, r)$.
- Teken de halve lijn PR of PS.
  Nu is $\angle A$ overgebracht op l.



b) Voer de zelfde constructie uit met een stompe hoek $\angle B$.

Opgave 30

a) Construeer een regelmatige zeshoek. Begin met een grote cirkel. Verbind de hoekpunten met het midden van de cirkel. De cirkels waarmee je de zeshoek getekend hebt kan je tevens gebruiken om de bissectrices te construeren van de hoeken in het midden. Doe dit. Teken de twaalfhoek. Nu weet je hoe je de wijzerplaat van een klok moet construeren!

b) Als je de cirkels van de zeshoekconstructie in zijn geheel tekent, krijg je een mooi plaatje. Je kunt er meer cirkels aan toevoegen en mooi inkleuren. Maak zo'n tekening.

2.5 Regelmatige veelhoeken

Een regelmatige veelhoek is een figuur met zijden die allemaal even lang en hoeken die allemaal even groot zijn. We zijn er al een paar tegen gekomen: de regelmatige zeshoek, maar ook de gelijkzijdige driehoek en het vierkant zijn regelmatige veelhoeken!

Voor ieder geheel getal groter dan 2 heb je, afgezien van de grootte (dus de lengte van de zijden), precies een type regelmatige veelhoek. Zo heb je regelmatige vijfhoeken, zeshoeken, zevenhoeken maar ook tweehonderdnegentienhoeken.

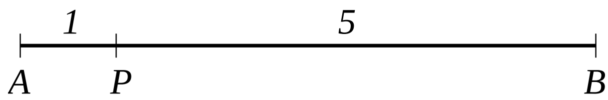
Hoe construeer je regelmatige veelhoeken? Met geodriehoek en een beetje rekenen kan je ze allemaal wel tekenen. Maar dat zijn geen echte constructies!

Het lijkt vreemd, maar: van niet zo erg veel regelmatige veelhoeken zijn constructies bekend. De Grieken waren er erg trots op dat ze een constructie vonden voor de vijfhoek. Maar het was voor hun vast vreselijk dat het niet lukte om bijvoorbeeld een negenhoek te construeren. Nou was het geen wonder dat het niet lukte, want zo'n 2000 jaar later werd bewezen dat het **onmogelijk** was om **een constructie te vinden voor een regelmatige negenhoek**! Toch hebben de Grieken nog wel een oplossing gevonden voor de negenhoek. Hoe? Met een zogenaamde pseudoconstructie, dat komt in de laatste paragraaf van dit hoofdstuk.

Opgave 31 Voor dat we beginnen met de constructies van tienhoeken en vijfhoeken gaan we eerst kijken naar een **verhouding**. Als op lijnstuk AB een punt P tussen A en B ligt zo dat de afstand van P tot B vijf keer zo groot is als de afstand van P tot A, dan zeggen we dat P het lijnstuk AB **verdeelt in de verhouding 1 : 5**. Dit wordt geschreven als: $AP : PB = 1 : 5$. Wanneer je kijkt naar onderstaand plaatje zie je dat hieruit volgt:

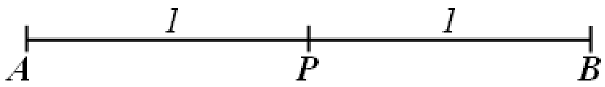
$AP : AB = 1 : 6$ en

$BP : AB = 5 : 6$



Het is duidelijk dat deze verhoudingen niet gelijk zijn. $1 : 5$ is niet hetzelfde als $5 : 6$ omdat $5 : 6 = \frac{5}{5} : \frac{6}{5} = 1 : 1,2$.

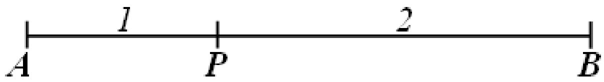
Ga bij de volgende verdelingen na dat de verhoudingen $AP : PB$ en $BP : AB$ wel steeds dichter bij elkaar komen.

a) 

Vul in:

$AP : PB$ = . . . : . . .

$PB : AB$ = . . . : . . . = 1 : ...

b) 

Vul in:

$AP : PB$ = . . . : . . .

$PB : AB$ = . . . : . . . = 1 : ...

c) 

Vul in:

$AP : PB$ = . . . : . . . = 1 : ...

$PB : AB$ = . . . : . . . = 1 : ...

d) 

Vul in:

$AP : PB$ = . . . : . . . = 1 : ...

$PB : AB$ = . . . : . . . = 1 : ...

e) 

Vul in:

$AP : PB$ = . . . : . . . = 1 : ...

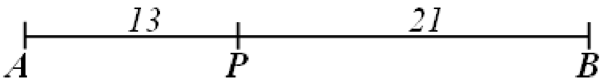
$PB : AB$ = . . . : . . . = 1 : ...

f) 

Vul in:

$AP : PB$ = . . . : . . . = 1 : ...

$PB : AB = \ldots : \ldots = 1 : \ldots$

g) 

Vul in:
$AP : PB = \ldots : \ldots = 1 : \ldots$
$PB : AB = \ldots : \ldots = 1 : \ldots$

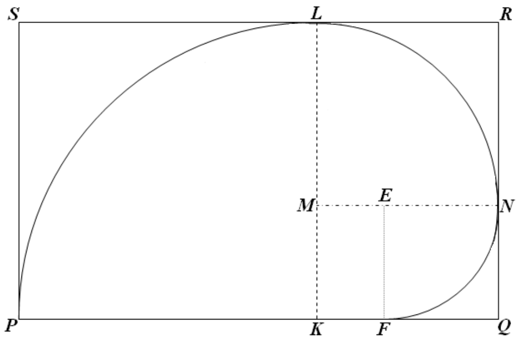
h) 

Vul in:
$AP : PB = \ldots : \ldots = 1 : \ldots$
$PB : AB = \ldots : \ldots = 1 : \ldots$

Opgave 32

a) Het waren wederom de Grieken die een constructie vonden om een lijnstuk AB zo te verdelen met een punt P zodat $AP : PB$ precies hetzelfde is als $PB : AB$. *Het kleinste deel heeft dan dezelfde verhouding tot het grootste deel als het grootste deel tot het geheel.* Deze verhouding heeft veel fraaie eigenschappen. Nu gaan we die constructie uitvoeren. Begin met een lijnstuk AB over de hele breedte van je schrift. Richt in A een loodlijn op en teken hierop een punt C zodat $AC = \frac{1}{2}AB$. Je hebt geleerd hoe je dit helemaal met passer en liniaal kunt construeren, maar je mag ook wel smokkelen door dit met je geodriehoek te doen. Teken lijnstuk BC. Teken $\odot(C, AC)$. Het snijpunt met BC noem je D. Teken nu $\odot(B, BD)$ en snijd deze met AB. Het punt P dat je nu gevonden hebt is de **gulden snede**. Controleer, door nauwkeurig te meten met je geodriehoek, dat de verhouding $AP : PB$ inderdaad gelijk is aan $BP : AB$. Deze verhouding heet de **gulden snede verhouding**.

b) Teken een rechthoek $PQRS$ waarbij PQ gelijk is aan AB en QR gelijk is aan de lengte van PB van onderdeel a). Deze vorm wordt **guldensnederechthoek** genoemd. De vorm wordt als heel harmonisch ervaren en wordt veel gebruikt in de kunst.



c) We gaan nu in deze rechthoek de **guldensnede-spiraal** construeren:

- Teken K en L, zodat $PKLS$ een vierkant is.
- Teken $\odot(K, PK)$.
- Teken N en M, zodat $LMNR$ een vierkant is.
- Teken $\odot(M, LM)$.
- Teken E en F, zodat $EFQN$ een vierkant is.
- Teken $\odot(E, EN)$, enzovoort!

Opgave 33

a) Dit deel mag je tekenen met je geodriehoek. Gebruik het liefst ruitjespapier van A4-formaat of groter. Teken midden op je blaadje een vierkantje $ABCD$ met zijden van een halve centimeter. Teken links daaraan vast een vierkant $ADEF$, daaronder een vierkant $BFGH$, rechts een vierkant $CHIJ$, daarboven een vierkant $EJKL$, links een vierkant $GLMN$, daaronder een vierkant $INOP$, rechts een vierkant $KPQR$, etc., etc..

b) Teken nu steeds een kwart deel van de $\odot(A, AB)$ van B naar D, $\odot(A, AD)$ van D naar F, $\odot(B, BF)$ van F naar H en ga zelf zo verder. Je krijgt een guldensnedespiraal.

c) Controleer dat de lengten van de zijden van de vierkanten de volgende rij vormen: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21..... Hoe lang zijn de zijden van de volgende 5 vierkanten? Deze reeks getallen worden de reeks van **Fibonacci** genoemd.

d) Controleer dat de rechthoeken die je krijgt (zoals $IKMN$) naarmate ze groter worden steeds meer een **guldensnede-rechthoek** benaderen.

Opgave 34 De constructie van de tienhoek

Nu komen we toe aan een hele mooie, klassieke Griekse constructie: de constructie van de regelmatige tienhoek. Je zult zien dat we daarbij gebruik maken van de gulden snede en dat de tienhoek makkelijker te construeren is dan de vijfhoek. De zijde van de tienhoek staat namelijk in guldensnede verhouding met de straal van zijn omgeschreven cirkel! Daar gaan we:

a) Teken een grote cirkel op een lege bladzijde in je schrift. Noem het middelpunt M. Teken een diameterAB (A en B liggen dus op de cirkel en M ligt op het lijnstuk AB). Construeer vervolgens een tweede diameter CD die loodrecht op AB staat (met behulp van twee cirkels met middelpunten A en B). Je hebt nu een cirkel met een kruis door het midden.

b) We gaan nu het midden N van MD construeren met behulp van $\odot(D, MD)$ en een lijn door de snijpunten van deze cirkel met de eerste cirkel. Teken nu het lijnstuk BN.

c) Op $\triangle MBN$ gaan we de guldensnede constructie toepassen. Teken $\odot(N, NM)$. Het snijpunt met BN noemen we K. Snijd nu $\odot(B, BK)$ met BM om het punt L te verkrijgen dat BM in gulden snede verhouding verdeelt.

d) De lengte BL is nu de zijde van de tienhoek, zoals je kan controleren door deze lengte vanuit B tien keer af te passen op de eerste cirkel. Als je eerst vijf keer de ene kant en dan vijf keer de andere kant afpast dan moet je beide keren in A uit komen! Als dat in de verste verte niet uitkomt heb je iets in de constructie helemaal fout gedaan. Maar als het net niet helemaal uitkomt heb je wat te onnauwkeurig gewerkt (is je passerpunt wel scherp genoeg?). In de toekomst zal je (hopelijk) het bewijs te zien krijgen dat deze constructie exact klopt!

e) Teken de tienhoek. Een vijfhoek kan je construeren door om de beurt een hoekpunt van de tienhoek te nemen. Maar een mooiere constructie komt nog.

Opgave 35 Schrijf de constructie van de regelmatige tienhoek puntsgewijs op.

Opgave 36 De constructie van de vijfhoek

a) De constructie begint hetzelfde als die van de tienhoek. Begin daarom nog eens met een leeg blaadje en maak deeltje a) en b) van de opgave over de tienhoek nog eens opnieuw.

b) Teken het snijpunt O van $\odot(N, BN)$ met MC. Ga na en probeer te beredeneren dat OM net zo lang is als BL, en...dus de zijde van de tienhoek is (en MC in de guldensnede verhouding verdeelt).

c) AO is nu de zijde van de vijfhoek! Pas AO vanaf A vijf keer af op de eerste cirkel en als het goed is ben je weer terug in A. Noem de punten P, Q, R, en S.

d) Teken nu, door de punten te verbinden, de regelmatige vijfhoek $APQRS$.

e) Teken het **pentagram** $AQSPR$ in weer een andere kleur. Controleer dat de lijnstukken van het pentagram elkaar in gulden snedeverhouding snijden.

Opgave 37 Schrijf de constructie van de regelmatige vijfhoek puntsgewijs op.

2.6 Pseudoconstructies

Bij het maken van constructies zijn we tot nu toe steeds uitgegaan van het gebruik van passer en liniaal. De liniaal mag je uitsluitend gebruiken om een lijn te tekenen door twee gegeven punten en voor het gebruik van de passer moet een middelpunt gegeven zijn en twee punten die de straal van de cirkel bepalen.

Alhoewel deze manier van tekenen soms heel wat lastiger is dan het tekenen met geodriehoek, is er het praktisch voordeel van uitvoering op iedere schaal en het theoretisch voordeel dat je kan bewijzen dat constructies exact kloppen.

In deze paragraaf gaan we kijken wat er gebeurt als we vasthouden aan de eis van exactheid en bewijsbaarheid, maar ons beperken wat betreft het gebruik van passer en liniaal, of: juist het gebruik uitbreiden door een soort gebruik toe te staan dat anders niet mag.

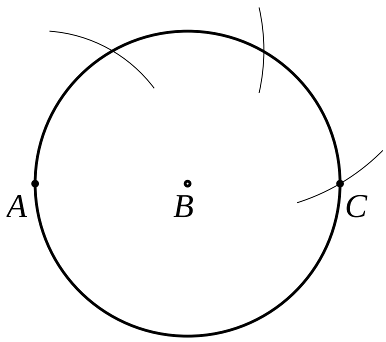
Wat voor constructies kan je nog maken als je alleen maar een liniaal hebt en geen passer? Dan kan je nog maar heel erg weinig. Probeer maar eens een lijnstuk in twee gelijke delen te verdelen zonder passer (en natuurlijk zonder de schaalverdeling van je liniaal te gebruiken!).

Interessanter zijn constructies waarbij je uitsluitend de passer mag gebruiken en absoluut geen liniaal. Al voor 1800 wist de Italiaan Mascheroni te bewijzen dat iedere constructie, die je met passer en liniaal kan maken, ook uit te voeren is met uitsluitend de passer. Niet dat het er makkelijker op wordt! We gaan één voorbeeld bekijken.

Opgave 38 De constructie van het midden van een lijnstuk, uitsluitend met de passer.

Teken twee punten A en B. We gaan het midden van lijnstuk AB construeren. Maar zelfs dit lijnstuk zelf mogen we niet tekenen, want we gebruiken alleen de passer!

- Teken $\odot(B, AB)$.
- Pas straal AB 3 keer af op de cirkel vanuit $A \Rightarrow$ punt C (op het verlengde van AB, zie tekening).
- Teken $\odot(A, AB)$ en $\odot(C, AC) \Rightarrow$ snijpunten D en E.
- Teken $\odot(D, AD)$ en $\odot(E, AE) \Rightarrow$ snijpunten A (was er al!) en M, waarbij M het gezochte midden van AB is!



De Grieken hebben heel veel mooie constructies verzonnen en bewezen, maar er waren enkele dingen die hun maar niet wilden lukken, ongetwijfeld tot hun grote frustratie!

De drie klassieke problemen waren:

- **De verdubbeling van de kubus:** hoe kan je de zijde van een kubus construeren waarvan de inhoud twee keer zo groot is als die van een kubus met gegeven zijde.
- **De kwadratuur van de cirkel:** Hoe kan je een vierkant construeren waarvan de oppervlakte even groot is als de oppervlakte van een gegeven cirkel.
- **De trisectie van een hoek:** Hoe kan je een gegeven hoek in drie gelijke delen verdelen.

Het was geen wonder dat het hun maar niet wilde lukken: in de negentiende eeuw hebben wiskundigen weten te bewijzen dat deze constructies onmogelijk uit te voeren zijn!

En toch: de beroemde Griekse wiskundige Archimedes vond een oplossing voor de trisectie van de hoek. Maar daarbij gebruikte hij de liniaal op een niet helemaal geoorloofde wijze. Hij zette er namelijk twee streepjes op. Een soort schaalverdeling dus. Een constructie waarbij je dat toestaat heet ook wel een glij-liniaalconstructie, of pseudoconstructie.Daar gaan we:

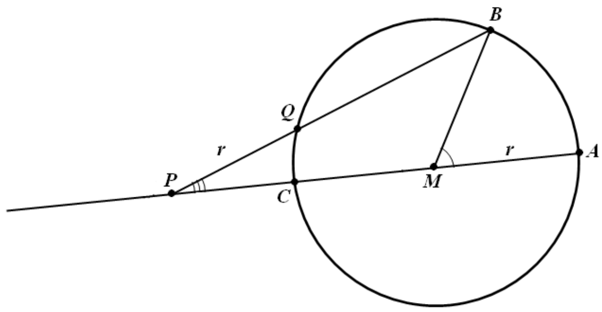
Opgave 39 Pseudoconstructie van de trisectie van een hoek

a) Teken een cirkel om een punt M met daarop twee punten A en B (Zorg er voor dat $\angle AMB$,in ieder geval, niet veel groter wordt dan een rechte hoek). We gaan $\angle AMB$ in drie gelijke delen verdelen.

b) Zet twee streepjes op je liniaal waarvan de afstand gelijk is aan de straal van de cirkel. (Je mag ook de schaalverdeling op je liniaal gebruiken en die straal dus opmeten.)

c) Het verlengde van AM snijdt de cirkel in$C$. Ga nu je liniaal zo neer leggen dat hij door B gaat en de twee streepjes op de cirkel en op het verlengde van MC liggen. Dan moet je heel wat heen en weer glijden! Als je die twee punten P en Q noemt, dan weet je dus dat P op AM ligt, Q op de cirkel ligt en dat de afstand PQ gelijk is aan de straal van de cirkel (als het niet duidelijk is, kijk dan op de tekening hieronder).

d) $\angle APB$ is nu de gezochte hoek. Meet dit na door met je geodriehoek te meten of door $\angle APB$ driemaal over te brengen naar $\angle AMB$ en te laten zien dat dit precies past.



Opgave 40 Pseudoconstructie van de zevenhoek

Ook van een regelmatige zevenhoek is bewezen dat die niet op de gewone manier te construeren is. Maar met een pseudoconstructie lukt dat wel:

a) Teken $\odot(M, r)$ zo groot als op je blaadje past en teken een diameter AB. Construeer vervolgens de diameter $CD \perp AB$. Construeer nu de middelloodlijn van AM. Teken tot slot $\odot(A, AC)$.

b) Zet weer twee streepjes op je liniaal waarvan de afstand gelijk is aan de straal van de eerste cirkel. Leg je liniaal nu zo neer dat die door M gaat, tussen punt A en C doorgaat en dat het ene streepje op de middelloodlijn ligt van AM (noem dat punt$P$) en het andere streepje op de cirkel $\odot(A, AC)$ (punt$Q$). Het snijpunt van de lijn die je zo krijgt met $\odot(M, r)$ tussen A en C noemen we R.

c) AR is de zijde van de zevenhoek. Controleer dat door AR zeven keer op de eerste cirkel af te passen vanuit$A$. Kom je uit?

d) Teken de zevenhoek nu met een kleurtje. Je kunt ook door verschillende diagonalen te nemen met twee kleuren twee mooie sterren er in tekenen.

Hoofdstuk 3

Algebra

3.1 Inleiding

Al-Khwarizmi een Arabisch wiskundige (±780 - ±850 na Chr), schreef een boek over het oplossen van eerste- en tweedegraadsvergelijkingen: 'Hisab al-jabr w'al muqabala'. Dit is misschien wel het eerste boek over algebra. Het woord "Algebra" is een verbastering van het "al-jabr" in de titel van dit boek.

Al-Khwarizmi werkte in het 'Huis der wijsheid', opgericht in Baghdad door kalief al-Mamun (zoon van de legendarische kalief Harun al-Rashid). Samen met andere geleerden werkte hij daar aan het vertalen van teksten van, onder anderen, de Oude Grieken, de Romeinen en de Joden. Ook bestudeerden zij de wiskunde en de astronomie.

Algebra in een of andere vorm bestond natuurlijk al veel langer. De geschiedenis van de algebra is eigenlijk vooral de geschiedenis van de variabele. De eenvoudigste vorm van een variabele, en vermoedelijk ook de oudste, is de afkorting.

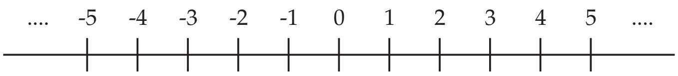
Een voorbeeld daarvan is $F = \frac{9}{5}C + 32$. Dit is een afkorting van het volgende berekeningsrecept: De temperatuur in graden Fahrenheit kan worden berekend uit de temperatuur in graden Celcius door het aantal graden Celcius te vermenigvuldigen met 9, het resultaat te delen door 5 en bij de uitkomst daarvan 32 op te tellen.

Het leren rekenen met variabelen is het doel van dit hoofdstuk.

3.2 Basiskennis

In hoofdstuk 1 zijn aan de orde geweest:

3.2.1 De getallenlijn



3.2.2 Symbolen, tekens en getallen

Het = teken

$5 + 2 + 3 = 10$ = geeft aan dat wat links van = staat, rekenkundig gelijk is aan wat rechts van = staat.

De ongelijkheidstekens

De ongelijkheidstekens zijn:

$2 < 3$ is waar — < betekent: kleiner dan.
$0 > -1$ is waar — > betekent: groter dan.
$-5 \leq 1$ is waar — ≤ betekent: kleiner of gelijk aan.
$-4 \geq -5$ is waar — ≥ betekent: groter of gelijk aan.
2 < 3 betekent dus 2 is kleiner dan 3, of:
2 staat op de getallenlijn links van 3.

Positieve getallen

$2; 3; \frac{1}{2}$ Positieve getallen zijn getallen die groter zijn dan nul. Ze staan op de getallenlijn rechts van het getal 0.

$12 > 0$

Negatieve getallen

Negatieve getallen zijn getallen die kleiner zijn dan nul. Ze worden aangeduid met een min-teken ervoor.

$-2 < 0$

Nul

Nul is niet positief en niet negatief.

Gebroken getallen of breuken

Breuken zijn getallen van de vorm $\frac{teller}{noemer}$, waarbij de teller en de noemer gehele getallen zijn. De noemer kan niet gelijk aan 0 zijn. Zoals je weet maken we vaak geen verschil tussen een breuk en een deling.
Als in de teller óf in de noemer een negatief getal staat, dan is het gebruikelijk om het minteken vóór de breukstreep te zetten.

$8 : -5 = \frac{8}{-5}$

$\frac{-3}{4} = -\frac{3}{4}$ en

$\frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$

Opgave 1 Neem over en vul in (gebruik > voor "is groter dan", of < voor "is kleiner dan", of = voor "is gelijk aan"):

a) $-5 \cdots -6$, **want** ...

b) $\frac{11}{30} \ldots \frac{5}{12}$, **want** ...

c) $\frac{31}{15} \ldots \frac{25}{13}$, **want** ...

d) $-1\frac{7}{8} \cdots -\frac{31}{16}$, **want** ...

e) $\frac{220}{100} \ldots \frac{22}{9}$, **want** ...

f) $3\frac{7}{12} \ldots \frac{86}{24}$, **want** ...

3.2.3 Bewerkingen met getallen

Vermenigvuldigen

De onderdelen waarop de bewerking 'vermenigvuldigen' wordt uitgevoerd heten **factoren**. Het geheel van twee factoren en de bewerking vermenigvuldigen heet **product**. Het resultaat van de bewerking 'vermenigvuldigen' heet **uitkomst**.

$3 \times 4 = 12$
3,4 zijn factoren,
3×4het product,
12 is de uitkomst.

Het vermenigvuldigen van positieve en negatieve getallen

$-2 \times 3 = -6$

Het vermenigvuldigen van breuken

Breuken worden vermenigvuldigd door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en ook de noemers met elkaar te vermenigvuldigen.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{12}$

Delen

Delen is de omgekeerde bewerking van vermenigvuldigen.

$6 : 3 = 2$,
want $2 \times 3 = 6$

Wat wordt gedeeld heet het **deeltal**.
Waardoor wordt gedeeld heet de **deler**.

In $12 : 3 = 4$ is:
het deeltal 12,
de deler 3,
het quotiënt $12 : 3$,
uitkomst 4.

Deler en deeltal samen heten **quotiënt**.
Het resultaat van de bewerking ‘delen’ heet de **uitkomst**.

$-6 : 3 = -2$, want $-2 \times 3 = -6$.

Het delen van positieve en negatieve getallen

Het delen van breuken

$\frac{2}{3} : \frac{4}{7} =$

$\frac{2}{3} \times \frac{7}{4} = \frac{14}{12} = \frac{7}{6}$

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$ enz.

Breuken anders schrijven

Optellen en aftrekken

- De onderdelen waarop de bewerking ´optellen´ wordt uitgevoerd heten **termen**.
- Het geheel van twee termen en de bewerking ’optellen’ heet **som** (en van de bewerking ’aftrekken’ **verschil**.
- Het resultaat van de bewerking ’optellen’ of ’aftrekken’ heet **uitkomst**.

$2 + -3 = -1$

$2 + 3 = 5$

$-2 - 3 = -5$

Het optellen van positieve en negatieve getallen

Het optellen van breuken

$\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{2}{6} + \frac{3}{6} = \frac{5}{6}$

Breuken kunnen alleen worden opgeteld als ze gelijke noemers hebben. Als ze ongelijke noemer hebben moeten ze eerst gelijknamig worden gemaakt.

Het vereenvoudigen van breuken

$\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ teller en noemer door 4 gedeeld;want: $\frac{4}{12} = \frac{4x1}{4x3} = \frac{4}{4} \times \frac{1}{3} = 1 \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Breuken kunnen worden vereenvoudigd door teller en noemer door een zelfde getal te delen. Dat levert een getal op dat op de getallenlijn op dezelfde plaats staat en dus dezelfde waarde heeft.

Haakjes wegwerken

$2 \times (2 + 3) = 2 \times 5 = 10$

Bereken eerst wat tussen haakjes staat en ga dan pas verder.

Machtsverheffen

$2^3 = 2 \times 2 \times 2$

$3^2 = 3 \times 3$

Machtsverheffen is herhaald vermenigvuldigen van dezelfde factor.
$2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$, hierin heet 2 het **grondtal** en 7 de **exponent**.

Opgave 2 Vereenvoudig:

a) $\frac{-48}{12}$ c) $\frac{81}{-36}$ e) $\frac{17}{-1}$ g) $\frac{-150}{-75}$

b) $\frac{27}{-3}$ d) $\frac{50}{-5}$ f) $\frac{44}{10}$ h) $\frac{80}{-16}$

Opgave 3 Bereken:

a) $\frac{3}{5} + \frac{1}{10}$ c) $\frac{3}{7} - \frac{3}{14}$ e) $-\frac{9}{12} - \frac{12}{9}$ g) $\frac{-3}{-17} + \frac{3}{17}$

b) $\frac{5}{9} - \frac{7}{9}$ d) $-\frac{1}{8} + 1\frac{2}{8}$ f) $-\frac{2}{6} - \frac{5}{6}$ h) $\frac{7}{-6} + 2\frac{1}{3}$

Opgave 4 Bereken:

a) $\frac{5}{8} \times \frac{3}{7}$ c) $-\frac{9}{2} \times -\frac{5}{4}$ e) $-4\frac{1}{6} \times \frac{1}{7}$ g) $\frac{3}{8} \times -2\frac{1}{12}$

b) $-\frac{2}{9} \times \frac{7}{5}$ d) $5 \times \frac{2}{3}$ f) $2\frac{5}{6} \times 1\frac{2}{9}$ h) $3\frac{2}{3} \times -1\frac{5}{9}$

Opgave 5 Bereken:

a) $\frac{3}{4} : \frac{5}{2}$ c) $\frac{1}{3} : \frac{2}{5}$ e) $\frac{2}{3} : \frac{1}{4}$ g) $6 : \frac{1}{4}$

b) $-\frac{6}{5} : \frac{1}{3}$ d) $-3\frac{1}{5} : -\frac{1}{5}$ f) $3\frac{1}{2} : -2\frac{1}{3}$ h) $-1 : 1\frac{1}{2}$

Opgave 6 Bereken:

a) 2^3 c) $(\frac{1}{5})^4$ e) $(\frac{2}{7})^3$ g) $-(3\frac{3}{5})^2$

b) 3^6 d) 6^3 f) $(-3)^5$ h) $(-1\frac{1}{2})^3$

3.2.4 Afspraken

Volgorde van bewerking

Om misverstanden te voorkomen en haakjes te kunnen weglaten is afgesproken de rekenkundige bewerkingen

- haakjes wegwerken,
- machtsverheffen,
- vermenigvuldigen en delen,

$2 + 3 \times 4 - 3 =$

$2 + 12 - 3 =$

$14 - 3 = 11$

$2 \times 3 - (2 + 3) =$

$2 \times 3 - 5 =$

$= 6 - 5 = 1$

- optellen en aftrekken

in deze volgorde uit te voeren, waarbij vermenigvuldigen en delen als gelijkwaardige bewerkingen worden beschouwd en van links naar rechts worden uitgevoerd, evenals optellen en aftrekken.

Breuken worden altijd zo veel mogelijk vereenvoudigd.

Let op dat steeds aan weerszijden van het = teken dingen staan die ook echt aan elkaar gelijk zijn!!

3.2.5 Eigenschappen

De wissel-eigenschap voor vermenigvuldigen

$2 \times 3 = 3 \times 2$

Vermenigvuldigen kan in omgekeerde volgorde worden uitgevoerd, zonder dat de uitkomst verandert.

De wissel-eigenschap voor optellen

$4 + 5 = 5 + 4$

Ook optellen kan in omgekeerde volgorde worden uitgevoerd, zonder dat de uitkomst verandert.

$3 - 2 \neq 2 - 3$, maar $3 - 2 = 3 + -2 =$ $= -2 + 3$

$6 : 3 \neq 3 : 6$, maar $6 : 3 = 6 \times \frac{1}{3} =$ $= \frac{1}{3} \times 6$

De wissel-eigenschap geldt **niet** voor aftrekken en delen.

Wel kunnen we een aftrekking in een optelling veranderen en een deling in een vermenigvuldiging, waarna de wissel-eigenschap wél geldt.

De volgorde-eigenschap voor vermenigvuldigen

$(2 \times 3) \times 4 =$ $6 \times 4 = 24$

$2 \times (3 \times 4) =$ $2 \times 12 = 24$

Vermenigvuldigen kan in een willekeurige volgorde worden gedaan.

De volgorde-eigenschap voor optellen

$(2 + 3) + 4 =$ $= 5 + 4 = 9$

$2 + (3 + 4) =$ $2 + 7 = 9$

$(2 + 4) + 3 =$ $= 6 + 3 = 9$

Optellen kan in een willekeurige volgorde worden gedaan.

Ook de volgorde-eigenschap geldt **niet** voor delen en aftrekken. Wel kunnen we ook hier een aftrekking in een optelling veranderen en een deling in een vermenigvuldiging, waarna de volgorde-eigenschap wél geldt.

Opgave 7 Bereken:

a) $2 \times 3 - 6 \times -2$

b) $-3 \times 2 + 2 \times 3$

c) $-8 - 4 \times 2$

d) $12 - 3\times4 + 17$

e) $-20 + 12 : 2 \times 3$

f) $22 : 2 + 3 \times 3$

g) $13 - 3 \times 2 : 4$

h) $33 : 3 \times 11 - 1$

Opgave 8 Bereken:

a) $12 - (3 + 3) : 2$

b) $(11 - 1) : 5 + 2$

c) $22 : (13 - 2) \times 2$

d) $17 - 5 \times (2 + 1)$

e) $16 : (5 + 3) \times (3 + 2)$

f) $(1 - 1) \times (12 + 17) \times (2 + 3)$

g) $(3 - 3) : 12 - 2$

h) $(17 - 12) : (3 + 2) + 2$

Opgave 9 Bereken:

a) $(3\frac{2}{3} - \frac{1}{2})^2$

b) $11 : \frac{1}{3} - (-3^4 + 14)$

c) $(3 \times 5)^2 - (\frac{1}{2} \times 5)^2$

d) $3 \times 5^2 - \frac{1}{2} \times 5^2$

e) $(\frac{1}{15} - \frac{1}{10}) : \frac{2}{5}$

f) $1\frac{2}{5} \times (\frac{2}{7} + (2 - 1\frac{4}{7}))$

g) $(-1)^9 : (\frac{3}{7} \times 2\frac{1}{3})^{10}$

h) $(-\frac{3}{25} \times 75)^3 + 10 \times 27$

3.3 Variabelen

3.3.1 Inleiding

$F = \frac{9}{5} \times 15 + 32 =$

$27 + 32 = 59$

$15°C = 59°F$

In de inleidende tekst aan het begin van dit hoofdstuk staat een afkorting waarmee de temperatuur in graden Celsius in graden Fahrenheit kan worden omgerekend:

$$F = \frac{9}{5}C + 32$$

Zo'n afkorting wordt een *formule* genoemd en is handig omdat op de plaats waar C staat iedere temperatuur in graden Celsius kan worden ingevuld die je maar wilt. Na berekening rolt de bijbehorende temperatuur in graden Fahrenheit er als het ware vanzelf uit.

Op die manier wordt vaak een letter gebruikt om een getal te vertegenwoordigen. Zo'n letter is dan als het ware een lege plaats waar later een getal kan worden ingevuld.

Zo'n letter heet dan een **variabele**.

Herleiden

De optelling 2+3 kun je uitvoeren immers: 2+3 = 5 De optelling $a + b$ kan niet worden uitgevoerd.

Herleiden betekent: **anders schrijven**, meestal: **eenvoudiger schrijven**. Alle symbolen, tekens, getallen, bewerkingen, afspraken en eigenschappen die hierboven zijn genoemd gelden in principe ook voor het rekenen met variabelen. Men moet er alleen rekening mee houden dat bij variabelen sommige bewerkingen niet verder kunnen worden uitgevoerd.

3.3.2 Vermenigvuldigen met variabelen

De wissel-eigenschap voor vermenigvuldigen

Vermenigvuldigen kan in omgekeerde volgorde gebeuren, want voor ieder paar getallen a en b geldt:

$$a \times b = b \times a.$$

De volgorde-eigenschap voor vermenigvuldigen

Vermenigvuldigen kan in een willekeurige volgorde worden gedaan, want voor ieder getal a, b en c geldt:

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c).$$

In plaats van het ×-teken gebruiken we in de wiskunde vaak een punt. Bij het vermenigvuldigen van variabelen wordt zelfs de punt vaak weggelaten. $a \cdot b = ab$

Vermenigvuldigen van losse variabelen

Zet de variabelen achter elkaar, in alfabetische volgorde $c \cdot a \cdot d = acd$

Vermenigvuldigen van producten van variabelen

Zet de variabelen achter elkaar, in alfabetische volgorde. $ab \cdot f \cdot de =$ $= abdef$

Vermenigvuldigen van producten van variabelen en getallen

Vermenigvuldig de getallen met elkaar en zet ze voorop. Zet daarna de variabelen er in alfabetische volgorde achter. $3x \cdot 4yz = 12xyz$

Vermenigvuldigen van dezelfde variabelen

Schrijf $a \cdot a$ als a^2 en $x \cdot x \cdot x$ als x^3 enz. (zie ook bij 'Machten'). $3ab \cdot 2ac =$ $= 6a^2bc$

Opgave 10 Herleid:

a) $2x \cdot 3y$

b) $a \cdot 12b$

c) $18c \cdot 3b \cdot 21c$

d) $22x \cdot 12y \cdot 2a$

e) $x \cdot y \cdot 2z \cdot 12 \cdot 11$

f) $2z \cdot 12 \cdot 3x$

3.3.3 Optellen met variabelen

De onderdelen van een optelling worden **termen** genoemd. Een term kan bestaan uit:

In $a + 2$ zijn a en 2 de termen.

een getal

bijv. 3

of een variabele

bijv. a

of een product van variabelen

bijv. ab.

bijv. $2abc$.

of een product van een getal en één of meer variabelen, hierin kunnen ook breuken voorkomen.

Er zijn gewoontes voor het opschrijven wat betreft de volgorde:

bijv. $6xyz$

- We schrijven $3a$ en niet $a3$, 3 heet hier de **coëfficiënt** van a.
- We schrijven de variabelen in één term in alfabetische volgorde.

Je kunt alleen gelijksoortige termen optellen.

In $3 + 204 = 207$ zijn 3 en 204 gelijksoortig

In $4a + 3a = 7a$ zijn $4a$ en $3a$ gelijksoortig

We noemen termen gelijksoortig als als ze precies dezelfde variabelen bevatten en ook precies evenveel van elke variabele.
Termen zonder variabelen, dus met alleen getallen, kun je natuurlijk altijd bij elkaar optellen.

Nog een gewoonte wat betreft de volgorde:

$2ab + a + 3$

- We schrijven meestal $a + 3$ en niet $3 + a$.

$a + b + x + 7$

- We schrijven termen zoveel mogelijk in alfabetische volgorde.

De eigenschappen die worden gebruikt zijn:

De wissel-eigenschap voor optellen

$22 - 2a + 2b - a - 3b = -3a - b + 22$

Optellen kan in omgekeerde volgorde gebeuren want

$$a + b = b + a$$

De volgorde-eigenschap voor optellen

$12c + 3a - 2c - 12a = 9a + 10c$

Optellen kan in willekeurige volgorde worden gedaan want

$$(a + b) + c = a + (b + c).$$

Opgave 11 Herleid:

a) $2x + 3x$

b) $13y + 12y$

c) $2y - 7y + 5x$

d) $3a - 2b + 3a$

e) $7t - 3t + 4t - 7s$

f) $12k - 3j - 11k$

Opgave 12 Herleid:

a) $3b - 2a + 2b - 2a$

b) $2k - 3 + 12l - 3k + 1$

c) $3x - 3y + 33 - 12 - x$

d) $12 - 3t + 2x - 3$

e) $2a - 3b + 4c + 2b - a + 12$

f) $22x - 33y + 12 - x - y$

Opgave 13 Herleid:

a) $2a - 3b + 3 - b + 12$

b) $x - y + 2 - 3 - 2x$

c) $2i - 3j + i + 2j + 1$

d) $x + 2y - 17x + 12$

e) $87x + 53y - 98x + 1$

f) $78 + 17x - 97 - 119x$

Optellen en vermenigvuldigen kunnen ook door elkaar voorkomen.

Denk aan de volgorde-afspraak: vermenigvuldigen en delen komt vóór optellen en aftrekken.

$2xy + 3y \cdot x =$
$2xy + 3xy = 5xy$
De gelijksoortige termen $2xy$, $3xy$ kun je optellen!

Opgave 14 Herleid:

a) $2a \cdot b - 3b \cdot 2a$

b) $xy - 2x \cdot 78y$

c) $12 + 13x \cdot y - 3y \cdot 17x$

d) $2x \cdot 13y + 2x$

e) $7x - 3xy \cdot 12z$

f) $2ab - 3a + 2b \cdot a$

Opgave 15 Herleid:

a) $13a \cdot 12b + 27 - a \cdot 7b - 17$ d) $2 \cdot 3b - 6ab$

b) $118a \cdot 3b - ac + 12 \cdot ab$ e) $12a \cdot 2b - 3b \cdot 7a$

c) $17xy - 12z \cdot 3x - 3y \cdot 14x$ f) $x \cdot 13yz - 12xz \cdot 2y$

3.3.4 Delen met variabelen

In de wiskunde wordt een deling meestal met een breukstreep geschreven, zoals we die van breuken kennen. Dus niet $(ax) : (12b)$maar

$$\frac{ax}{12b}$$

Ook bij zo'n deling spreken we van de teller en de noemer.

Let op: Eigenlijk zouden we moeten zeggen dat de noemer $12b$, en dus b niet 0 mag zijn. Maar omdat dat zo vanzelfsprekend is, wordt dit nooit gedaan.

Delingen met variabelen vermenigvuldigen

$\frac{x}{z} \cdot \frac{3ab}{2c} = \frac{3abx}{2cz}$
$\frac{2}{a} \cdot -3 = -\frac{6}{a}$

Breuken en delingen kunnen worden vermenigvuldigd door de tellers met elkaar te vermenigvuldigen en de noemers met elkaar te vermenigvuldigen. (Bedenk hierbij dat bijvoorbeeld 3 kan worden geschreven als $\frac{3}{1}$ en ac als $\frac{ac}{1}$.)

Opgave 16 Herleid:

a) $\frac{a}{9} \cdot \frac{7}{b}$ c) $-\frac{8}{x} \cdot -\frac{y}{3}$ e) $\frac{2a}{b} \cdot \frac{c}{3d}$

b) $\frac{5}{x} \cdot -3$ d) $\frac{5p}{q} \cdot -\frac{a}{b}$ f) $4 \cdot \frac{a}{b}$

Opgave 17 Herleid:

a) $\frac{6a}{11b} \cdot \frac{1}{7}$ c) $b \cdot \frac{a}{7}$ e) $\frac{x}{y} \cdot 2\frac{1}{5}$

b) $-\frac{3a}{b} \cdot \frac{x}{y}$ d) $-\frac{3x}{y} \cdot -\frac{p}{12q}$ f) $\frac{a}{2b} \cdot \frac{p}{2q} \cdot \frac{x}{2y}$

Delingen met variabelen vereenvoudigen

Breuken en delingen hebben de eigenschap dat ze op verschillende manieren geschreven kunnen worden, terwijl ze toch dezelfde waarde houden (dezelfde plaats op de getallenlijn):

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$$

Teller en noemer mogen met een zelfde getal of variabele worden vermenigvuldigd. **Deze eigenschap heet de equivalentie-eigenschap**. De eigenschap volgt uit de vermenigvuldigingsregel voor breuken, immers:

$$\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{c} = \frac{ac}{bc}$$

Natuurlijk kunnen teller en noemer ook door eenzelfde getal of variabele worden gedeeld. Deze eigenschap gebruiken we nu bij het vereenvoudigen van delingen. In plaats van het weggedeelde getal of de weggedeelde variabele zetten we een 1.

$\frac{abc}{abd} = \frac{\cancel{a}\cancel{b}\,c}{\cancel{a}\cancel{b}\,d} =$
$= \frac{1c}{1d} = \frac{c}{d}$
teller en noemer gedeeld door ab

Opgave 18 Herleid:

a) $\frac{24a}{6}$ c) $-\frac{p}{7p}$ e) $\frac{18abc}{3a}$

b) $\frac{16abc}{6}$ d) $\frac{6a}{12a}$ f) $\frac{24ab}{12a}$

Opgave 19 Herleid:

a) $\frac{-28xyz}{14z}$ c) $-\frac{-30pq}{-6q}$ e) $\frac{32a}{8ab}$

b) $\frac{-12pq}{3p}$ d) $\frac{22ac}{-11c}$ f) $\frac{12pq}{6qr}$

Opgave 20 Herleid:

a) $\frac{3 \cdot 2}{3}$ c) $-\frac{ab}{2b}$ e) $\frac{2+3}{2+3}$

b) $\frac{3+2}{3}$ d) $\frac{a+b}{a}$ f) $\frac{a+b}{a+b}$

Opgave 21 Herleid:

a) $\frac{2x+y}{x+y}$ c) $\frac{axy}{byz}$ e) $\frac{y+x}{x+y}$

b) $-\frac{33ab}{3b}$ d) $\frac{-5ap}{10px}$ f) $\frac{9abxy}{-3ayz}$

Wegdelen vóór het vermenigvuldigen

Met de regels voor het vermenigvuldigen van breuken en de wissel-regel voor vermenigvuldigen:

$$\frac{ac}{d}\cdot\frac{d}{a}=\frac{acd}{da}=\frac{adc}{ad}=\frac{ad}{ad}\cdot\frac{c}{1}=1\cdot c=c$$

In de praktijk schrijven we dat korter:

$$\frac{ac}{d}\cdot\frac{d}{a}=\frac{\cancel{a}\,c}{\cancel{d}}\cdot\frac{\cancel{d}}{\cancel{a}}=\frac{1c}{1}\cdot\frac{1}{1}=\frac{c}{1}=c,$$

of nog korter:

$$\frac{ac}{d}\cdot\frac{d}{a}=\frac{\cancel{a}\,c}{\cancel{d}}\cdot\frac{\cancel{d}}{\cancel{a}}=c.$$

Opgave 22 Herleid:

a) $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}$ c) $\frac{ab}{c}\cdot\frac{d}{abd}$ e) $\frac{2a}{b}\cdot\frac{b}{3a}$

b) $\frac{x}{2y}\cdot\frac{y}{2x}$ d) $\frac{3p}{q}\cdot -q$ f) $\frac{3a}{b}\cdot\frac{2b}{a}$

Opgave 23 Herleid:

a) $\frac{ab}{c}\cdot\frac{2c}{5a}$ c) $-\frac{x}{2y}\cdot -\frac{1}{x}$ e) $-\frac{a}{bc}\cdot\frac{1}{a}$

b) $6x\cdot\frac{2y}{3x}$ d) $\frac{pq}{p}\cdot -\frac{4}{2q}$ f) $-\frac{p}{2q}\cdot\frac{6q}{p}$

Opgave 24 Herleid:

a) $-\frac{12pq}{b}\cdot -\frac{ab}{3p}$ c) $-12\cdot\frac{ac}{3b}\cdot\frac{b}{4c}$ e) $\frac{17xz}{6}\cdot\frac{12a}{34x}$

b) $\frac{ab}{33}\cdot -\frac{11}{ac}$ d) $21a\cdot\frac{3bc}{7abc}$ f) $\frac{ax}{7y}\cdot 14$

Opgave 25 Herleid:

a) $\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}$ c) $\frac{2}{q}\cdot\frac{b}{6}\cdot\frac{12q}{b}$ e) $12ac\cdot\frac{bd}{6}\cdot\frac{1}{24bc}$

b) $a\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{a}$ d) $\frac{y}{6b}\cdot\frac{2}{y}\cdot 3ab$ f) $\frac{5p}{3q}\cdot pq\cdot\frac{7}{p}$

Breuken/delingen met variabelen

Delen door een breuk is hetzelfde als vermenigvuldigen met het omgekeerde van die breuk.
Immers: $\frac{6}{3} = 2$ is waar, want $2 \cdot 3 = 6$.
Op dezelfde manier geldt:

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

want

$$\frac{ad}{bc} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a\cancel{d}}{b\cancel{c}} \cdot \frac{\cancel{c}}{\cancel{d}} = \frac{a}{b}$$

Opgave 26 Herleid:

a) $\frac{7}{12} : \frac{5}{12}$ c) $\frac{a}{c} : \frac{b}{d}$ e) $\frac{c}{d} : \frac{p}{2}$

b) $\frac{2}{a} : \frac{3}{a}$ d) $-\frac{p}{q} : \frac{r}{q}$ f) $\frac{2x}{3y} : \frac{x}{12}$

Opgave 27 Herleid:

a) $\frac{2a}{b} : \frac{b}{3a}$ c) $2pq : \frac{6p}{3}$ e) $\frac{2xy}{z} : 7xy$

b) $\frac{3ab}{c} : \frac{2a}{c}$ d) $ab : \frac{ab}{c}$ f) $5 : \frac{ab}{5c}$

Opgave 28 Herleid:

a) $\frac{2x}{3y} : -\frac{x}{12}$ c) $-\frac{3a}{5b} : \frac{2a}{3b}$ e) $7ab : \frac{14bx}{3y}$

b) $\frac{2}{a} : \frac{3}{a}$ d) $\frac{a}{b} : c$ f) $\frac{100}{xyz} : \frac{1000}{xz}$

Optellen en aftrekken van gelijknamige breuken/delingen met variabelen

Breuken en delingen kunnen alleen worden opgeteld of afgetrokken als ze gelijknamig zijn, d.w.z. als ze dezelfde noemers hebben.
De uitkomst heeft dezelfde noemer als de breuken die bij elkaar worden opgeteld of van elkaar worden afgetrokken. De teller is de som of het verschil van de twee tellers. Dit gaat dus precies zoals het optellen van breuken zonder variabelen.

$\frac{a}{b} + \frac{2c}{b} = \frac{a+2c}{b}$

Opgave 29 Herleid:

a) $\frac{2}{3a} + \frac{3}{3a}$ c) $\frac{x}{y} + \frac{z}{y}$ e) $\frac{12x}{z} - \frac{12}{z}$

b) $\frac{2}{3ab} - \frac{3}{3ab}$ d) $\frac{2x}{z} - \frac{x}{z}$ f) $\frac{12z}{xy} - \frac{11z}{xy}$

Opgave 30 Herleid:

a) $\frac{3a}{c} + \frac{2a}{c}$ c) $-\frac{x}{2y} + \frac{3x}{2y}$ e) $-\frac{2a}{3b} + \frac{8a}{3b}$

b) $-\frac{4y}{3z} - \frac{2y}{3z}$ d) $-\frac{q}{4r} - \frac{q}{4r}$ f) $\frac{b}{2c} - \frac{b}{2c}$

Optellen en aftrekken van ongelijknamige breuken/delingen

$\frac{a}{b} + \frac{a}{c} = \frac{ac}{bc} + \frac{ab}{bc} = \frac{ac+ab}{bc}$ in de eerste breuk zijn teller en noemer met c vermenigvuldigd de tweede met b.

Ongelijknamige breuken moeten eerst gelijknamig worden gemaakt, voor ze kunnen worden opgeteld of afgetrokken. Hiervoor maken we weer gebruik van de equivalentie-eigenschap: *Teller en noemer mogen met eenzelfde getal of variabele worden vermenigvuldigd.*

Opgave 31 Herleid:

a) $\frac{4}{a} + \frac{5}{2a}$ c) $\frac{3}{2a} - \frac{4}{a}$ e) $-\frac{7}{2x} - \frac{1}{x}$

b) $\frac{2}{a} - \frac{1}{5a}$ d) $-\frac{1}{3a} + \frac{2}{a}$ f) $\frac{3}{2p} - \frac{4}{4p}$

Opgave 32 Herleid:

a) $\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ c) $\frac{a}{bc} + \frac{1}{b}$ e) $\frac{5}{a} - \frac{2}{ab}$

b) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ d) $\frac{x}{y} - \frac{3}{z}$ f) $\frac{2p}{x} - \frac{3q}{y}$

Opgave 33 Herleid:

a) $1 + \frac{1}{x}$ c) $a + \frac{1}{3}$ e) $x - \frac{2}{y}$

b) $2 - \frac{1}{y}$ d) $b - \frac{2}{5}$ f) $a - \frac{1}{2b}$

Opgave 34 Herleid:

a) $\frac{b}{x} + \frac{c}{y}$ c) $\frac{1}{ab} - \frac{c}{a}$ e) $\frac{17ab}{3} - \frac{3}{17}$

b) $\frac{a}{x} + \frac{1}{2}$ d) $\frac{12a}{b} + \frac{2}{c}$ f) $\frac{12x}{y} - 12a$

Gelijknamig maken door vereenvoudigen

Soms kan gelijknamig maken door vereenvoudigen; ook hiervoor wordt weer gebruik gemaakt van de equivalentie-eigenschap.

$\frac{xy}{z} + \frac{ab}{bz} =$

$\frac{xy}{z} + \frac{a\cancel{b}}{\cancel{b}z} = \frac{xy+a}{z}$

Opgave 35 Herleid:

a) $\frac{12x}{xy} - \frac{11}{y}$ c) $12 - \frac{13a}{a}$ e) $\frac{22ab}{b} - 21a$

b) $\frac{1}{a} + \frac{3bc}{abc}$ d) $\frac{2a}{ab} + \frac{3c}{bc} - \frac{d}{bd}$ f) $-21ac + \frac{22abc}{b}$

Opgave 36 Herleid:

a) $\frac{ab}{2b} + \frac{a}{2ab}$ c) $\frac{q}{2pq} - \frac{4q}{2q}$ e) $\frac{x}{xy} + \frac{z}{yz}$

b) $\frac{a}{2abc} - \frac{2}{6bc}$ d) $\frac{b}{bc} + \frac{c}{ac}$ f) $-\frac{5c}{3bc} - \frac{3a}{ab}$

3.3.5 Machten

Herhaald vermenigvuldigen van hetzelfde getal wordt geschreven als **macht**. Bijvoorbeeld: $a^3 = a \cdot a \cdot a$, a heet het **grondtal** en ^{3} de **exponent**.

Optellen en aftrekken van machten

Machten kunnen alleen worden opgeteld of afgetrokken als ze gelijksoortige termen vormen: zowel de grondtallen als de exponenten moeten gelijk zijn, immers: $a^3 = aaa$.

$a^3 + a^3 = 2a^3$
maar
$a^3 + a^2 = a^3 + a^2$

Opgave 37 Herleid:

a) $a^3 + 2a^3$

b) $2x^2 - 3x^2$

c) $2xy^3 - 3xy^3$

d) $x^3y^2 - 22x^3y^2$

e) $2x - 3x + 2x^2 - 3x^2$

f) $2x^3 - 2x^2 + 3x^3$

Opgave 38 Herleid:

a) $10a^2b + 3a^2b$

b) $2d^2 - \frac{1}{2}d^2$

c) $c^5 - 5c^5$

d) $3a^2 + 3p - 5a^2 + 6p$

e) $4\frac{1}{3}y^2z^3 - 3\frac{1}{4}y^2z^3$

f) $3a^2b + 2ab^2 + 7a^2b + 4ab^2$

Vermenigvuldigen van machten

Machten met hetzelfde grondtal kunnen worden vermenigvuldigd door de exponenten op te tellen. Immers:

$$x^2 \cdot x^3 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^{2+3} = x^5.$$

Maar let op: $x^2 + x^3$ kan niet korter. De termen zijn niet gelijksoortig, omdat de variabele in de eerste term twee keer voorkomt en in de tweede term drie keer!

Opgave 39 Herleid:

a) $p^3 \cdot p^2$

b) $q^4 \cdot q^6$

c) $y^2 \cdot y^7$

d) $2^5 \cdot 2^4$

e) $a^6 \cdot a^6$

f) $q^8 \cdot q$

Opgave 40 Herleid:

a) $a^4 \cdot a \cdot a^5$

b) $b^2 \cdot b^7 \cdot b^3$

c) $z \cdot z$

d) $10^3 \cdot 10^6$

e) $d \cdot d \cdot d^9$

f) $2 \cdot 2^4$

Opgave 41 Herleid:

a) $x^2 \cdot 2x^5$ c) $-2a^7 \cdot 7a^2$ e) $5y \cdot -3y^2$

b) $2x^2 \cdot 3x$ d) $\frac{1}{2}b \cdot 4b^2$ f) $-c \cdot -\frac{3}{5}c^3$

Opgave 42 Herleid:

a) $xy \cdot y$ c) $x^3 \cdot 2x^2y$ e) $xyz^2 \cdot x^2z$

b) $xy \cdot x^3y$ d) $2ab^3 \cdot 3a^2b$ f) $2xyz \cdot 3xy \cdot 4z^2$

Delen van machten

Machten met hetzelfde grondtal kunnen worden gedeeld door de exponenten af te trekken. Immers:

$\frac{x^7}{x^3} = x^4$

$$\frac{a^5}{a^3} = \frac{aaaaa}{aaa} = \frac{aaa}{aaa}\frac{aa}{1} = 1 \cdot \frac{a^2}{1} = a^2 = a^{5-3}.$$

Of door te vereenvoudigen.

$\frac{a^3}{a^5} = \frac{\cancel{a^3}\,1}{a^{\cancel{5}\,2}} = \frac{1}{a^2}$

Opgave 43 Herleid:

a) $\frac{2^6}{2^2}$ c) $\frac{a^3}{a}$ e) $\frac{x^8}{x^5}$

b) $\frac{5^3}{5^2}$ d) $\frac{s^3}{s^2}$ f) $\frac{x^{25}}{x^{24}}$

Opgave 44 Herleid:

a) $\frac{8a^5}{4a^2}$ c) $\frac{12x^5}{6x^2}$ e) $\frac{18z^6}{9z^6}$

b) $\frac{a^{15}}{a^{15}}$ d) $\frac{-10y^7}{5y^3}$ f) $\frac{-12p^6}{-4p^5}$

Opgave 45 Herleid:

a) $\frac{p^5q^3}{p^2q^3}$ c) $\frac{16pq^4}{8pq^2}$ e) $\frac{a^4b^7}{a^4b^4}$

b) $\frac{a^8b^7}{a^4b^3}$ d) $\frac{7x^2y^2}{7xy}$ f) $\frac{24a^{10}b^5}{8a^3b}$

Machten van machten

$((z^2)^3)^2 =$
$= z^{2\cdot 3\cdot 2} = z^{12}$

Een macht kan tot een macht worden verheven door de exponenten te vermenigvuldigen. $(x^3)^2 = x^6$, immers:

$$(x^3)^2 = x^3 \cdot x^3 = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^6 = x^{2\cdot 3}.$$

Opgave 46 Herleid:

a) $(2^4)^2$ c) $(x^4)^2$ e) $((b^2)^2)^3$

b) $(10^3)^5$ d) $(a^3)^8$ f) $((x^4)^2)^3$

Machten van producten

De macht van een product is het product van de factoren tot die macht.
$(ab)^3 = a^3b^3$, immers:

$$(ab)^3 = ab \cdot ab \cdot ab = a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b = a^3b^3.$$

Nog een voorbeeld:

$$(x^2y^3)^4 = (x^2)^4 \cdot (y^3)^4 = x^8y^{12}.$$

Opgave 47 Herleid:

a) $(5 \cdot 3)^2$ c) $(xy)^2$ e) $(p^2q)^3$

b) $(2^3 \cdot 5)^3$ d) $(ab^3)^2$ f) $(y^3z^4)^6$

Opgave 48 Herleid:

a) $(3a^2b^2)^4$ c) $(2x^2y^3)^2$ e) $(2x^2y)^2 \cdot (xz^2)^3$

b) $(xyz)^{13}$ d) $(3x^3y^2)^3$ f) $2(ab^2)^3(ab)^2$

Breuken en machten

De macht van een breuk is die macht van de teller gedeeld door die macht van de noemer. $(\frac{a}{b})^3 = \frac{a^3}{b^3}$, immers:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^3 = \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \frac{a^3}{b^3}.$$

$(\frac{x}{y^2})^2 = \frac{x^2}{y^4}$

Opgave 49 Herleid:

a) $(\frac{2}{3})^2$ c) $(\frac{x^2}{y})^4$ e) $(\frac{a^7}{b^3})^5$

b) $(\frac{a}{b})^2$ d) $(\frac{a^3}{b})^2$ f) $(\frac{2x^3}{y^6})^2$

Opgave 50 Herleid:

a) $(\frac{a^2b}{c^3})^2$ c) $12(\frac{x^2}{y})^3$ e) $(\frac{x^5}{z^2})^2 \cdot (\frac{1}{x})^5$

b) $(\frac{2xy^2}{4x^2y})^3$ d) $\frac{x^2}{y^3} \cdot \frac{y}{x^2}$ f) $(\frac{2x^3}{y})^2 \cdot (\frac{1}{x})^5 \cdot y$

3.3.6 Alles door elkaar

Opgave 51 Herleid:

a) $-3b - 4b$ c) $\frac{a}{b} + \frac{1}{2b}$ e) $-\frac{x}{ac} + \frac{2}{ab}$

b) $3x^2 + x - x^2$ d) $\frac{30pr}{-12pqr}$ f) $-\frac{2}{a} \cdot \frac{ab}{c}$

Opgave 52 Herleid:

a) $-\frac{3}{8} \cdot -2\frac{2}{3}$ c) $(-7pq)^2$ e) $a : \frac{1}{b}$

b) $\frac{a}{bc} : \frac{1}{b}$ d) $(2z)^3 + z^3$ f) $a \cdot \frac{1}{b}$

Opgave 53 Herleid:

a) $\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{z} \cdot \frac{z}{x}$ c) $2ab^3 \cdot 3a^2b$ e) $\frac{8x^5+2x^5}{5x^3}$

b) $-1\frac{3}{4} : \frac{x}{4}$ d) $\frac{(-5p^6q)^3}{(-pq)^2}$ f) $(-a)^8 - (a^2)^4$

Opgave 54 Herleid:

a) $13x^2y + 7x^2y$ c) $(xy)^9 + xy^9$ e) $\frac{-15pqr}{-5p} - 6q \cdot -5r$

b) $a^8 : a^3$ d) $\frac{2}{y} - \frac{3}{xy}$ f) $\frac{5p}{3q} \cdot -\frac{4x}{5y}$

Opgave 55 Herleid:

a) $-5a \cdot \frac{2b}{10x} + \frac{2x}{ab}$ c) $-\frac{5x}{12y} : -\frac{2x}{5}$ e) $17m^2 - 8m^2$

b) $\frac{-20p^5q^4}{-5p^2q^3}$ d) $\frac{35ab}{60bc} + x^2 \cdot \frac{3yz}{4cy}$ f) $(3x^3)^2(-2xy^2)^3$

Opgave 56 Herleid:

a) $\frac{-x}{2y} \cdot -\frac{2y}{x}$ c) $(p^3)^8 \cdot pq^2$ e) $(a^3b)^2 : \frac{b}{a}$

b) $\frac{-x}{2y} : -\frac{2y}{x}$ d) $(\frac{x}{y})^3 - (\frac{2}{3z})^2$ f) $(\frac{pq^3}{(pq)^3})^3$

3.4 Gemengde opgaven

Opgave 57 *(Kangoeroe 1995)* Als ik Tim twee chocoladerepen geef, dan mag ik zijn fiets drie uur lang lenen. Geef ik hem 12 koeken, dan mag ik zijn fiets twee uur gebruiken. Wanneer ik Tim nou morgen één reep en drie koeken geef, hoeveel uur mag ik zijn fiets dan lenen?

A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Opgave 58 *(Kangoeroe 1996)* Een vat dat geheel met melk gevuld is, weegt 34 kilo. Als het half gevuld is, weegt het 17,5 kilo. Hoeveel kilo weegt het vat (zonder melk)?

A) 1 B) 0,5 C) 1,5 D) 2 E) er zijn te weinig gegevens

Opgave 59 *(Kangoeroe 1997)* Een kaartje voor het museum kost 50 cent voor kinderen en 1 Euro voor volwassenen. Afgelopen zondag hebben 50 personen het museum bezocht. Zij betaalden in totaal 35 Euro voor hun toegangskaartjes. Hoeveel volwassenen waren er onder de bezoekers?

A) 10 B) 20 C) 25 D) 40 E) 45

Opgave 60 *(Kangoeroe 1997)* Vader heeft fruit gekocht: appels, peren, bananen en sinaasappels. Bij elkaar 44 vruchten. Het aantal appels is 2 meer dan het aantal peren, het aantal peren is 8 meer dan het aantal bananen en het aantal bananen is 2 meer dan het aantal sinaasappels. Het aantal peren dat vader kocht is

A) 12 B) 14 C) 15 D) 16 E) 18

Opgave 61 *(Kangoeroe 1997)* Anne heeft 8 toetsen gemaakt. Voor iedere toets kreeg ze 2, 3, 4, of 5 punten. Anne beweert: "Op de eerste zes toetsen had ik gemiddeld $3\frac{1}{2}$ punt gescoord, maar uiteindelijk ben ik toch nog op een gemiddelde van 4 punten uitgekomen!" Wat is het gemiddelde aantal punten van Anne op de laatste twee toetsen geweest?

A) 4 B) $4\frac{1}{2}$ C) 5 D) $5\frac{1}{2}$ E) wat Anne zegt is onmogelijk

Opgave 62 *(Kangoeroe 2000)* Iedere letter stelt een cijfer voor. Verschillende letters stellen verschillende cijfers voor. Dan is de uitkomst van:

$$\text{KANGOEROE} + 100000 \times \text{OEROE} - 100000 \times \text{KANG} =$$

A) OEROEKANG B) KANGKANG C) KANGOEROE

D) GOEKANROE E) OEROEOEROE

Opgave 63 *(Kangoeroe 2000)* 800 daalders zijn evenveel waard als 100 dukaten en 100 daalders zijn evenveel waard als 250 duiten. Hoeveel dukaten zijn even veel waard als 100 duiten?

A) 2 B) 5 C) 10 D) 25 E) 50

Opgave 64 *(Kangoeroe 2001)* Erik heeft 7 jongens meer als klasgenoot dan meisjes. In zijn klas zijn er twee keer zoveel jongens als meisjes. In deze klas zit ook Janneke. Hoeveel meisjes heeft zij als klasgenoot?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

Opgave 65 *(Kangoeroe 2002)* Op het verjaardagsfeestje van Wendy zijn er voor ieder kind zes glaasjes fris. Onverwacht komen ook nog drie nichtjes van Wendy binnen. Nu zijn er nog vijf glaasjes fris voor ieder kind. Hoeveel kinderen waren er op het feestje voordat de nichtjes binnenkwamen?

A) 4 B) 11 C) 14 D) 15 E) 18

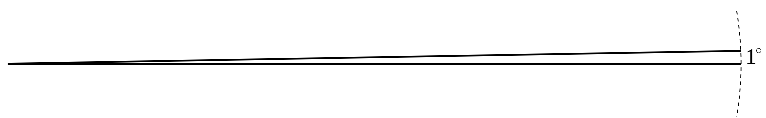
Hoofdstuk 4

Meten en berekenen

4.1 Hoeken meten en tekenen met de geodriehoek

MET BEHULP van je geodriehoek kan je sneller iets tekenen dan met passer en liniaal. Je kan dan gebruik maken van de centimeterverdeling, de gradenverdeling, de loodlijn en de evenwijdige lijntjes. De tekeningen die je op deze manier krijgt zijn echter geen passer en liniaal constructies. Echte wiskundigen vinden dit dan ook niks, maar handig is het wel!

Er zijn verschillende manieren om aan te geven hoe groot een hoek is. Op school leer je er twee: *radialen* en *graden*. De Babyloniers gebruikten lang voor het begin van de jaartelling al het systeem van graden. Zij gingen er (ten onrechte) vanuit dat er 360 dagen in een jaar zitten. Zij hadden veel interesse in sterrenkunde. Het was hun opgevallen dat sterren iedere dag net iets verschoven ten opzichte van de voorgaande dag. De hoek waaronder de sterren elke dag verschuiven, noemden ze een graad. De wiskundige notatie is 1°.

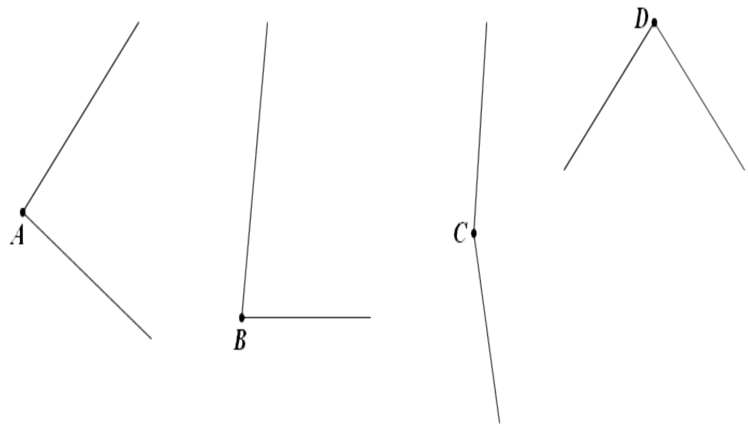


Aangezien de sterren in een jaar tijd weer op dezelfde plek aan de hemel stonden, is een hele cirkel een hoek van 360°. Een gestrekte hoek is dan een hoek van 180°. En een rechte hoek is 90°. Een scherpe hoek is altijd kleiner dan 90°, terwijl een stompe hoek tussen de 90° en 180° in zit.

Scherpe en stompe hoeken kan je meten met je geodriehoek. Je leraar zal je voordoen hoe het moet. Let er steeds goed op of de hoek scherp is of stomp, dan weet je of de hoek groter of kleiner is dan 90°!

Naast de graden staan er ook centimeters op de geodriehoek. In dit hoofdstuk gebruiken we meestal geen centimeters. In je schrift staan hokjes van 0,5 bij 0,5 cm, die kan je als eenheid gebruiken, maar je kan ook 2 cm of 10 cm of 1,5 cm, enz. als eenheid gebruiken. Het hangt er maar vanaf hoe groot je de figuur in je schrift wilt hebben. Iedereen krijgt toch dezelfde VORM! op papier (begrijp je dat?). Daarom schrijven we in de opgaven niet AB = 3 cm, maar AB = 3 en mag je zelf kiezen of je 3 mm, 3 halve centimeters, 3 cm, 3 dm of wat dan ook neemt. Als de figuur maar niet te klein en onduidelijk wordt en als die maar niet zo groot wordt dat hij niet meer op de bladzijde past!

Opgave 1 Meet de volgende hoeken op met je geodriehoek. Maak eerst met potlood de benen van de hoek langer. Let erop of ze scherp, recht, stomp of gestrekt zijn.



Je kunt met je geodriehoek ook hoeken van een bepaalde grootte tekenen. Je leraar doet je dit voor.

Opgave 2

a) Teken hoeken van 60°, 90°, 120° , 180°.
b) Teken hoeken van 23°, 167°, 55°, 125°.

Opgave 3

a) Teken een driehoek waarvan twee hoeken 50° zijn. Neem de zijden niet te kort! Meet op hoe groot de derde hoek is.
b) Teken een driehoek met een hoek van 25° en een hoek van 75°.

c) Teken een driehoek met een hoek van 57° en een hoek van 102°.

d) Tel bij ieder van de voorgaande driehoeken de drie hoeken bij elkaar op. Wat krijg je er steeds (ongeveer) uit?

e) Kan je een driehoek tekenen met twee stompe hoeken?

Opgave 4

a) Teken een scherpe hoek en gebruik je geodriehoek om deze hoek in twee gelijke delen te verdelen. Je hebt nu de bissectrice getekend.

b) Teken een stomphoekige driehoek en de bissectrices van de drie hoeken van de driehoek.

c) Teken een scherphoekige driehoek met de drie bissectrices.

d) Welke eigenschap hebben de drie bissectrices van een driehoek ook alweer?

Opgave 5

a) Teken met je geodriehoek een driehoek ABC, waarbij AB een lengte heeft van 10 cm, $\angle A$ een hoek van 60° is en $\angle B$ een hoek van 45° is.

b) Meet $\angle C$.

Opgave 6

a) Teken $\triangle KLM$ zó dat $KL = 6$, $LM = 3$ en $\angle L = 135^\circ$.

b) Hoe wordt een driehoek als ΔKLM genoemd?

Opgave 7 Sommige tekeningen kan je niet zonder passer tekenen of het is veel onhandiger. De geodriehoek is niet altijd makkelijker.

a) Teken een willekeurige hoek. Construeer met passer en liniaal de bissectrice van deze hoek.

b) Teken twee snijdende lijnen. Bij het snijpunt heb je 4 hoeken. Teken met de passer zo handig mogelijk alle 4 de bissectrices van deze hoeken.

Opgave 8

a) Teken met **behulp van je passer en je geodriehoek** een driehoek met zijden van 4, 5 en 6. Probeer het ook eens zonder je passer en je zult merken dat dat veel lastiger gaat.

b) Teken met passer en liniaal ΔABC zó dat $AB = 6$, $BC = 8$ en $AC = 10$. Meet op hoe groot de hoeken zijn.

c) Teken ΔPQR met $PQ = 5$, $QR = 3$ en $PR = 4$.

Opgave 9

a) Teken vierkant $ABCD$ en teken daarin de diagonalen AC en BD. Noem het snijpunt van de diagonalen S.

b) Meet $\angle ASB$.

c) Waarom geldt: $\angle ASB = \angle BSC = \angle CSD = \angle DSA$?

Opgave 10

a) Teken $\odot(M, r)$ en voer de constructie van zeshoek $ABCDEF$ uit. Teken de gelijkzijdige driehoek ACE.

b) Trek de lijnstukken die vanuit de hoekpunten van de driehoek naar M lopen. Je krijgt nu drie hoeken bij M. Meet deze op.

c) Hoe had je de grootte van deze hoeken kunnen berekenen?

d) Teken nu ook BM, DM en FM. Bereken $\angle BMA$.

Opgave 11

a) Nu gaan we een regelmatige vijfhoek met de geodriehoek tekenen. Dit is dus géén constructie! Teken eerst een grote $\odot(M, r)$ waarop straks de hoekpunten van de vijfhoek komen te liggen. Als A en B op de cirkel hoekpunten van de regelmatige vijfhoek zijn, dan moet $\angle AMB = 360^\circ : 5$ zijn! Teken nu met je geodriehoek de andere hoekpunten en maak de vijfhoek af.

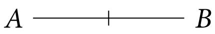
b) Teken de vijfhoek nog eens en teken nu, in een andere kleur, de diagonalen. Het figuur dat je krijgt heet **pentagram**. Pentagrammen worden geassocieerd met heksen, mystiek e.d. Een ander woord voor regelmatige vijfhoek is **pentagon**. Penta betekent vijf in het Grieks.

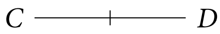
c) Maak op dezelfde manier (dus door eerst de hoeken bij het midden M uit te rekenen) tekeningen van een regelmatige zeven-, acht-, negen- en tienhoek. Als je het leuk vindt, kan je ook de diagonalen tekenen. Als je vervolgens inkleurt kan je mooie tekeningen maken!

4.2 Bijzondere driehoeken

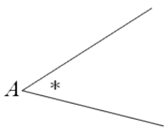
Een driehoek is een figuur met 3 hoekpunten en 3 zijden. Een **gelijkbenige** driehoek heeft twee even lange zijden. Die twee even lange zijden heten de **benen**. De derde zijde noemen we de **basis**. De hoek die gevormd wordt door de twee benen heet de **tophoek**, de andere twee hoeken zijn de **basishoeken**. De basishoeken zitten aan de basis vast en zijn altijd even groot.

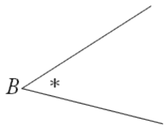
In een figuur worden even lange zijden vaak aangegeven met eenzelfde tekentje erin:



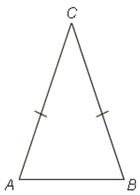
en


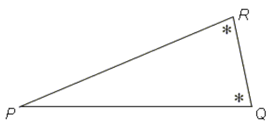
Gelijke hoeken worden bijvoorbeeld aangegeven met een *:

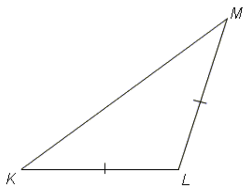


en


Opgave 12 Geef van de volgende driehoeken aan wat de benen, de basis, de tophoek en de basishoeken zijn.

(a)


(b)


(c)


Opgave 13 Een bijzonder soort gelijkbenige driehoek is een **gelijkzijdige** driehoek. Deze heeft drie even lange zijden. Construeer met passer en liniaal een gelijkzijdige driehoek met zijde 5.

Opgave 14

a) Een **rechthoekige** driehoek heeft een rechte hoek. Teken een driehoek waarvan de **rechthoekszijden** 3 en 4 zijn.

b) De schuine zijde van een rechthoekige driehoek wordt **hypotenusa** genoemd. Meet de hypotenusa uit opdracht-a op. Als je netjes hebt getekend is de hypotenusa 5 lang.

c) Je geodriehoek is een bijzondere driehoek. Meet hoe groot de hoeken en hoe lang de zijden zijn. Geef aan wat voor een soort driehoek dit is.

We zijn eerder de volgende **bijzondere lijnen** binnen een driehoek tegen gekomen:

- **Zwaartelijnen** gaan van een hoekpunt naar het midden van de overstaande zijde.
- **Middelloodlijnen** staan loodrecht op een zijde en gaan door het midden van die zijde.
- **Bissectrices** delen een hoek in twee gelijke delen.
- **Hoogtelijnen** gaan door een hoekpunt en staan loodrecht op de tegenover liggende zijde.

Opgave 15

a) Teken $\triangle ABC$ met $AB = 6$, $BC = 9$ en $AC = 10$, en teken de zwaartelijnen AP, BQ en CR.

b) De zwaartelijnen snijden elkaar in Z. Hoe wordt Z ook weer genoemd?

Opgave 16

a) Teken $\triangle ABC$ met $AB = 6$, $BC = 9$ en $AC = 10$.

b) Teken de middelloodlijnen van AB en BC en noem het snijpunt M.

c) Teken nu de derde middelloodlijn van AC en controleer of M op deze middelloodlijn ligt.

d) Teken een cirkel met middelpunt M die door één van de hoekpunten gaat. Controleer of deze cirkel ook door de andere twee hoekpunten gaat. Deze cirkel heet de **omgeschreven cirkel**.

Het middelpunt van de omgeschreven cirkel is het snijpunt van de middelloodlijnen.

Opgave 17

a) Teken een driehoek met zijden 6, 9 en 10. Teken hierin twee bissectrices en noem het snijpunt S.

b) Teken nu de derde bissectrice en controleer of S op deze bissectrice ligt.

c) Teken een lijn door S die loodrecht staat op één van de zijden. Het snijpunt met die zijden noemen we T.

d) Teken de cirkel met middelpunt S die door T gaat. Controleer dat deze cirkel alle drie de zijden raakt. Deze cirkel noemen we de **ingeschreven cirkel**.

Het middelpunt van de ingeschreven cirkel is het snijpunt van de bissectrices.

Opgave 18

a) Teken $\triangle ABC$ met $AB = 6$, $BC = 9$ en $AC = 10$ met daarin de hoogtelijnen k, l en m, en het hoogtepunt H.

b) Teken $\triangle KLM$ met $KL = 5$, $KM = 6$ en $ML = 10$. Teken het hoogtepunt van deze driehoek.

Opgave 19 Voor deze opgave heb je een blanco vel in A4-formaat en een liniaal van minimaal 20 cm nodig.

a) Teken $\triangle ABC$ met $AB = 20$, $AC = 15$ en $BC = 18$.

b) Teken de drie hoogtelijnen met snijpunt H.

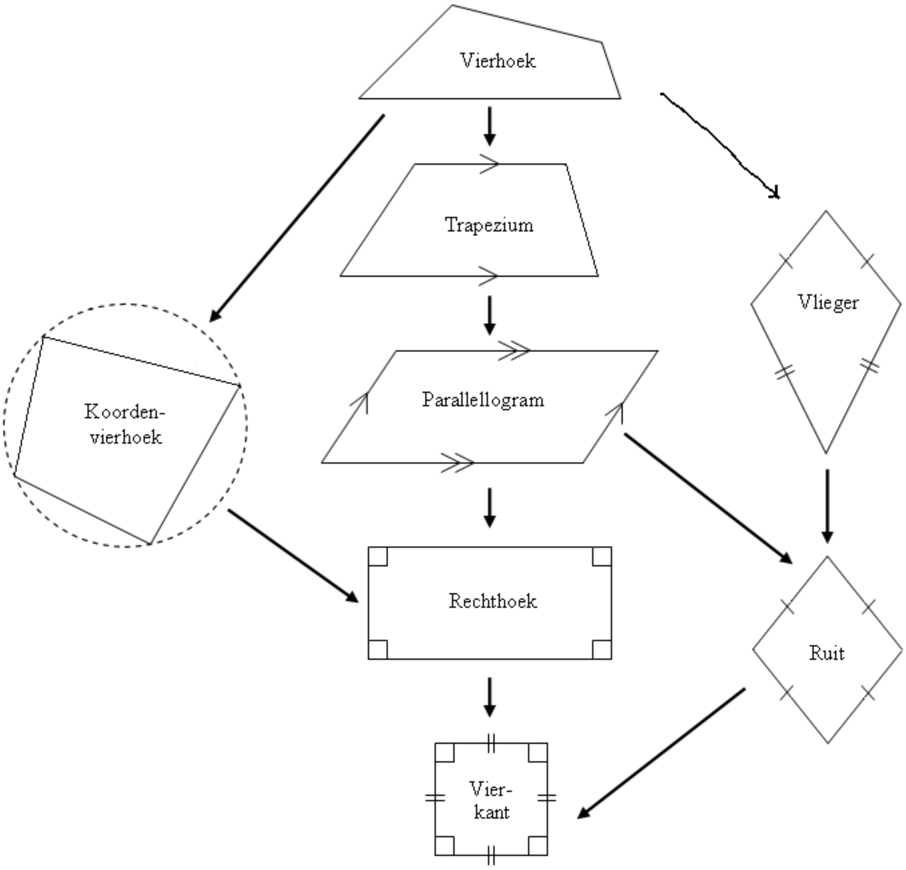
c) Teken de drie zwaartelijnen met snijpunt Z.

d) Teken de drie middelloodlijnen met snijpunt M.

e) Teken de lijn door H, Z en M. Deze lijn heet de **rechte van Euler**.

4.3 Bijzondere vierhoeken

Een vierhoek heeft 4 hoekpunten en 4 zijden die allemaal in één vlak liggen. De **diagonalen** verbinden hoekpunten die tegenover elkaar liggen. Er zijn veel bijzondere soorten vierhoeken. In het schema hieronder staan de meeste:



De pijlen geven de relaties aan tussen de verschillende soorten vierhoeken. Een vierkant bijvoorbeeld is een bijzonder soort rechthoek.

In de volgende opgave wordt gevraagd om de kenmerkende eigenschappen van de verschillende soorten vierhoeken te geven. Let er daarbij op dat de omschrijving **voldoende** is, en elk deel ervan **nodig**.

Voorbeeld 1 *Een parallellogram is een vierhoek met twee paar gelijke zijden.* De omschrijving is niet voldoende. Een vlieger bijvoorbeeld heeft óók twee paar gelijke zijden, maar een vlieger is géén parallellogram.

VOORBEELD 2 *Een parallellogram is een vierhoek met twee paar gelijke zijden waarvan de overstaande zijden evenwijdig zijn.* Deze omschrijving is wel voldoende, maar niet ieder deel ervan is nodig. De omschrijving *Een parallellogram is een vierhoek waarvan de overstaande zijden evenwijdig zijn* is al voldoende om een parallellogram van een andere vierhoek te onderscheiden. Het deel *met twee paar gelijke* zijden kan zonder problemen worden weggelaten.

VOORBEELD 3 *Een parallellogram is een vierhoek waarvan de overstaande zijden gelijk zijn.* Deze omschrijving is voldoende. Er zijn geen vierhoeken die géén parallellogram zijn met hetzélfde kenmerk. (Pas op! Van een vierkant zijn de overstaande zijden óók gelijk. Maar een vierkant is dan ook een bijzonder soort parallellogram.) De omschrijving is ook noodzakelijk. Immers: als van een vierhoek de overstaande zijden niet gelijk zijn, dan is die vierhoek meteen geen parallellogram meer.

De omschrijvingen *Een parallellogram is een vierhoek waarvan de overstaande zijden gelijk zijn* en *Een parallellogram is een vierhoek met twee paar evenwijdige zijden* zijn beide noodzakelijk en voldoende. De ene omschrijving is niet beter dan de ander. Er zijn nog wel meer correcte omschrijvingen te bedenken.

Opgave 20 Geef van ieder van de bijzondere vierhoeken een voldoende en noodzakelijke omschrijving.

Opgave 21 Geef alle mogelijke bijzondere vierhoeken die voldoen aan de beschrijving hieronder:

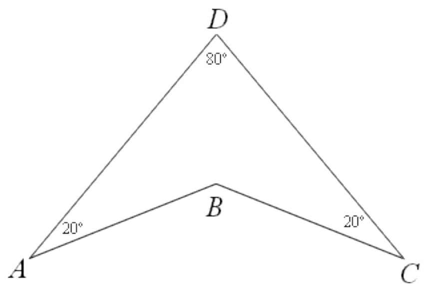
a) Een vierhoek waarvan de diagonalen gelijk zijn en elkaar in het midden snijden.
b) Een vierhoek waarvan de diagonalen gelijk zijn en elkaar loodrecht in het midden snijden.
c) Een vierhoek waarvan de ene diagonaal de ander loodrecht in het midden snijdt.
d) Een vierhoek waarvan de diagonalen elkaar in het midden snijden.
e) Een vierhoek waarvan de diagonalen elkaar loodrecht in het midden snijden.

Opgave 22

a) Teken een willekeurige vierhoek. Meet op hoe groot de hoeken zijn en bereken hoe groot deze hoeken samen zijn.

b) Teken een diagonaal in de vierhoek. Je krijgt nu 2 driehoeken. De som van de hoeken van een driehoek is 180°. Hoe groot is de som van de hoeken van een vierhoek dus?

c) Onderstaande figuur is ook een vierhoek. Bereken hoe groot hoek B is.

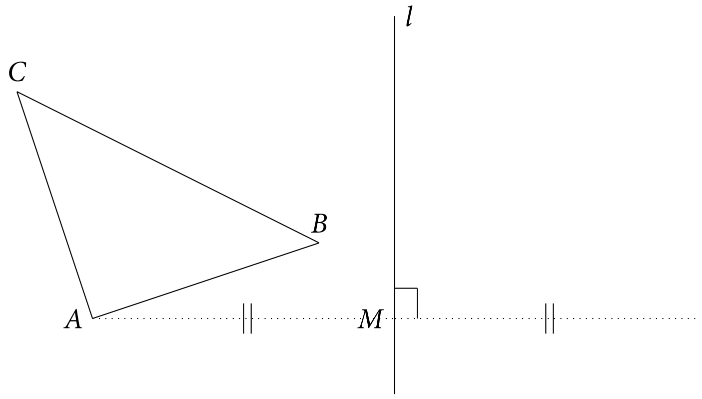


d) Wat zijn de kenmerken van de hoeken van een ruit? En van een vlieger? En van een parallellogram?

e) Teken een koordenvierhoek en meet de hoeken op. Bereken de som van de overstaande hoeken.

4.4 Spiegelen

Als je voor een spiegel staat, zie je jouw eigen spiegelbeeld in de spiegel. Maar als je misschien nog nooit een spiegel hebt gezien zou je kunnen denken dat er achter de spiegel nog een leerling staat die verdacht veel op je lijkt. Je spiegelbeeld staat recht tegenover jou en net zo ver achter de spiegel als jij ervoor staat. Als jij dichterbij de spiegel komt, komt je spiegelbeeld ook dichterbij. In het platte vlak kun je op een zelfde manier het spiegelbeeld van een punt of voorwerp vinden.
In de tekening hier links onder zijn A, B en C drie punten en is de lijn l de spiegellijn.

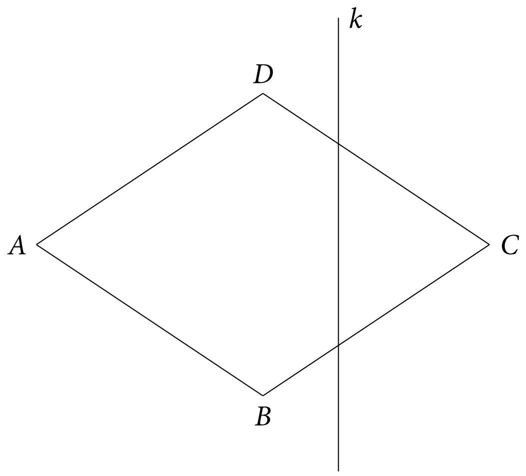


Je vindt het spiegelbeeld van punt A door een lijn vanuit A loodrecht op de spiegellijn te tekenen, die loodrechte lijn loopt aan de andere kant van de spiegellijn door. Het spiegelbeeld van punt A noemen we A'. Dit punt A' ligt op die stippellijn, net zover achter de spiegellijn, als punt A voor de lijn l ligt.

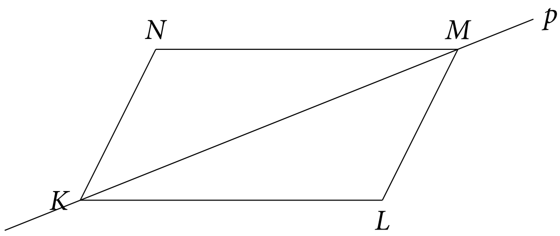
Opgave 23 Neem de tekening over en teken het spiegelbeeld van B en C. Noem die beeldpunten B' en C'.

De punten A, B en C vormen samen een driehoek. De punten A', B' en C' vormen samen ook een driehoek en $\triangle A'B'C'$ is het spiegelbeeld van $\triangle ABC$.

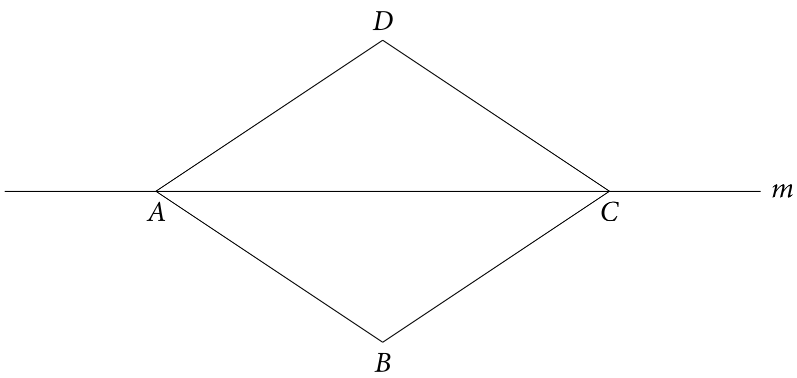
Opgave 24 Hieronder zie je een ruit $ABCD$ getekend en een spiegellijn k. Neem de tekening over en spiegel alle punten van $ABCD$ in de lijn k om zo het spiegelbeeld van de ruit te vinden.



Opgave 25 Hieronder zie je een parallellogram $KLMN$ getekend en een spiegellijn p. Neem over en spiegel alle punten van $KLMN$ in de lijn p om zo het spiegelbeeld van het parallellogram te vinden.



Opgave 26 In de tekening hieronder zie je een ruit $ABCD$ en een spiegellijn m. Neem over en teken het spiegelbeeld van $ABCD$.



4.5 Symmetrie

In de vorige opgave zie je dat het spiegelbeeld van de ruit $ABCD$ precies op zichzelf terecht komt. B wordt gespiegeld op D en andersom. A en C veranderen niet. Dus het spiegelbeeld van de ruit $ABCD$ is de ruit $ADCB$. We zeggen dan dat de ruit **symmetrisch** is met de spiegellijn m als **symmetrieas**.
Je kan het ook anders zeggen. Als je een ruit op een blaadje tekent, kun je het blaadje zo vouwen dat de ene helft van de ruit precies op de andere helft terecht komt. Als dat kan, zeggen we dat de figuur **symmetrisch** is. De vouwlijn heet dan de **symmetrieas**.

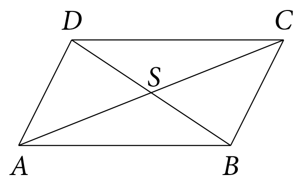
Opgave 27 Is er nog een symmetrieas te vinden bij de ruit $ABCD$? Zo ja, welke?

Opgave 28 Geef van de bijzondere driehoeken en vierhoeken aan of ze symmetrisch zijn en hoeveel symmetrieassen ze hebben.

Er zijn verschillende soorten symmetrie. Als je een figuur zo kunt vouwen dat de ene helft precies op de andere terecht komt spreken we van **lijnsymmetrie**. Een figuur is lijnsymmetrisch als er een lijn is zó, dat de figuur bij spiegeling in die lijn hetzelfde blijft. Die lijn heet de **symmetrie-as**

Een parallellogram is niet lijnsymmetrisch, maar bij de vorige opgave heb je het parallellogram waarschijnlijk wel genoemd. Dit parallellogram is niet symmetrisch in een lijn, maar wel in een punt. We noemen dit **puntsymmetrie**. Het snijpunt van de diagonalen is het symmetriepunt van het parallellogram.

Bij puntsymmetrie spiegel je eigenlijk alles in een punt, het spiegelpunt. Bij het spiegelen van punt A in een spiegelpunt S trek je een lijn van A naar S, die lijn trek je even ver door aan de andere kant van S en daar ligt het punt C, het puntspiegelbeeld van A. En het puntspiegelbeeld van B is D.



Er zijn ook hoofdletters die symmetrisch zijn, bijvoorbeeld de A en de B.

Opgave 29

a) Noem twee hoofdletters die één symmetrieas hebben.

b) Noem twee hoofdletters die twee symmetrieassen hebben.

c) Noem twee hoofdletters die puntsymmetrisch zijn en twee symmetrieassen hebben.

d) Noem twee hoofdletters die puntsymmetrisch zijn en geen symmetrieassen hebben.

e) Noem twee hoofdletters die niet symmetrisch zijn.

f) Zijn er hoofdletters die puntsymmetrisch zijn en maar één symmetrieas hebben?

Als een figuur puntsymmetrisch is en niet lijnsymmetrisch, kun je hem niet vouwen en op zichzelf laten uitkomen. Maar je kunt hem wel draaien en op zichzelf laten uitkomen. Denk nog maar eens aan het parallellogram. Zet (in gedachten) je passerpunt op het papier in het snijpunt van de diagonalen en draai het papier dan 180°. Dan krijg je precies hetzelfde parallellogram. Puntsymmetrie is een speciale vorm van **draaisymmetrie**. Je kunt dus ook zeggen dat het parallellogram draaisymmetrisch is over 180°.
Controleer of de puntsymmetrische letters die je bij de vorige opgave hebt gevonden ook draaisymmetrisch zijn over 180°.
Een figuur kan ook draaisymmetrisch zijn over een andere hoek dan 180°.

Opgave 30

a) Is een gelijkzijdige driehoek lijnsymmetrisch?

b) Is een gelijkzijdige driehoek puntsymmetrisch?

c) Is een gelijkzijdige driehoek draaisymmetrisch? Zo ja, over welke hoek?

Opgave 31

a) Bedenk zelf twee figuren die niet lijnsymmetrisch en niet puntsymmetrisch zijn, maar wel draaisymmetrisch. Geef erbij aan over welke hoek je de figuur kunt draaien.

b) Bedenk zelf twee figuren die wel lijnsymmetrisch zijn, en niet puntsymmetrisch, maar wel draaisymmetrisch. Geef erbij aan over welke hoek je de figuur kunt draaien.

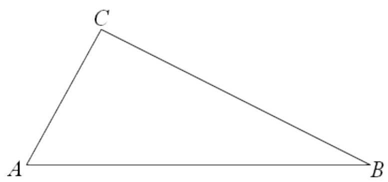
4.6 Berekeningen met hoeken en oppervlakten

We stappen hier weer af van het *construeren* met "passer en rechte" en we gaan ook niet *meten* zoals je hiervoor mocht doen. Nee, we gaan nu aan de hand van meetkundige eigenschappen en logisch redeneren hoeken en oppervlakten *berekenen*.

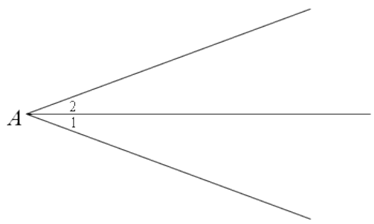
In een van de vorige paragrafen heb je ontdekt dat de som van de hoeken van een driehoek ongeveer 180° is. In de toekomst zullen we *bewijzen* dat voor iedere driehoek de som van de hoeken precies 180° is. Zo zijn er nog meer eigenschappen van hoeken die wij in de toekomst zullen bewijzen. Met die eigenschappen kan je in figuren, waarin enkele hoeken gegeven zijn, andere hoeken berekenen.

Ga bij de komende opgaven uit van de volgende eigenschappen:

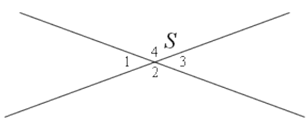
- De som van de hoeken van een driehoek is 180°.



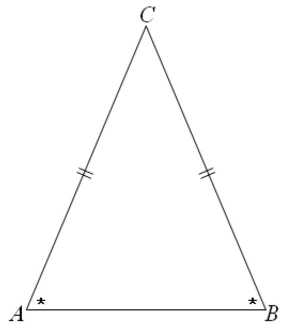
- Een bissectrice deelt een hoek in twee gelijke delen.
  $\angle A_1 = \angle A_2$



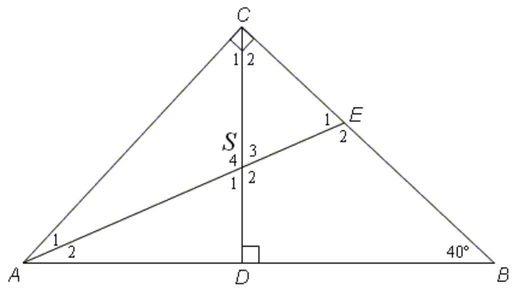
- Overstaande hoeken zijn gelijk.
  $\angle S_1 = \angle S_3$ en $\angle S_2 = \angle S_4$



- In een gelijkbenige driehoek zijn de *basishoeken* gelijk.
  Als $AC = BC$ dan is $\angle A = \angle B$



VOORBEELD



Gegeven:
AE is bissectrice van $\angle A$
$\angle ACB = \angle ADC = 90°$
$\angle ABC = 40°$

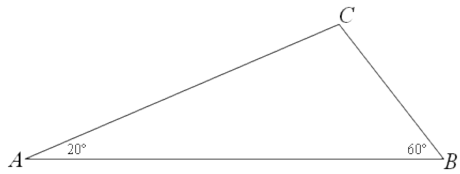
Te berekenen:
Alle hoeken in de figuur.

Berekening:
In $\triangle ABC$ geldt: $\angle A_{12} = 180 - \angle B - \angle C_{12} = 50°$ (hoekensom 180°)
$\angle A_1 = \angle A_{12} \div 2 = 25°$ (bissectrice)
In $\triangle ADS$ geldt: $\angle S_1 = 180 - \angle A_2 - \angle D_1 = 65°$ (hoekensom 180°)
$\angle S_3 = \angle S_1 = 65°$ (overstaande hoeken)
$\angle S_2 = \angle S_{23} - \angle S_3 = 115°$ (gestrekte hoek)
$\angle S_4 = \angle S_2 = 115°$ (overstaande hoeken)
In $\triangle ADC$ geldt: $\angle C_1 = 180 - \angle A_{12} - \angle D_1 = 40$ (hoekensom 180°)
$\angle C_2 = \angle C_{12} - \angle C_1 = 50°$
In $\triangle SEC$ geldt: $\angle E_1 = 180 - \angle C_2 - \angle S_3 = 65°$ (hoekensom 180°)
$\angle E_2 = \angle E_{12} - \angle E_1 = 115°$(gestrekte hoek)

Bij de volgende opgaven moet je de berekening net zo uitgebreid opschrijven als hierboven.

Opgave 32

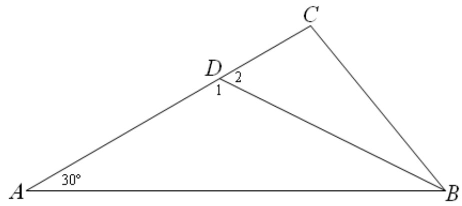
Gegeven: $\angle A = 20°$, $\angle B = 60°$
Bereken: $\angle C$



Opgave 33

Gegeven: $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$
BD bissectrice van $\angle B$

Bereken: $\angle D_2$

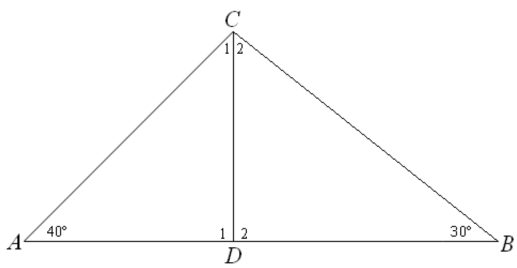


Opgave 34

Gegeven: $\angle A = 40°$, $\angle D_1 = 85°$, $\angle B = 30°$

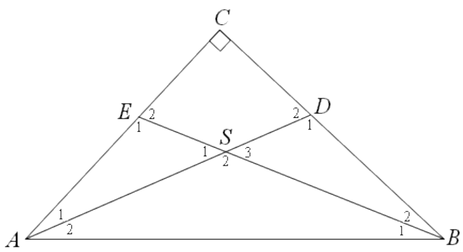
a) Bereken: $\angle C_1$ en $\angle C_2$

b) Is CD de bissectrice van $\angle C_{12}$?



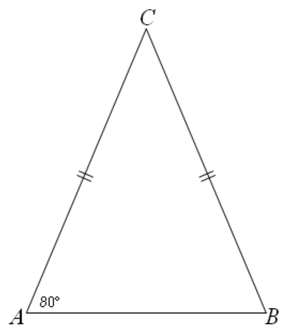
Opgave 35

Gegeven: $\angle A = 50°$, $\angle C = 90°$
AD is bissectrice van $\angle A$
BE is bissectrice van $\angle B$
Bereken: $\angle S_1$ en $\angle S_2$



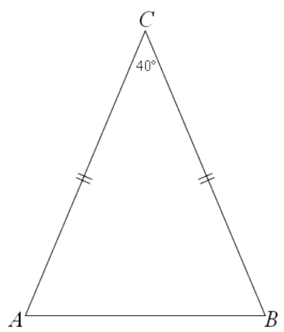
Opgave 36

Gegeven: $AC = BC$, $\angle A = 80°$
Bereken: $\angle C$



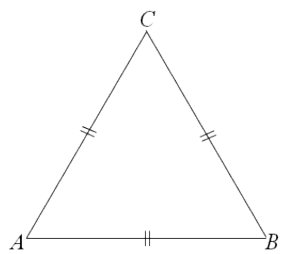
Opgave 37

Gegeven: $AC = BC$, $\angle C = 40°$
Bereken: $\angle A$



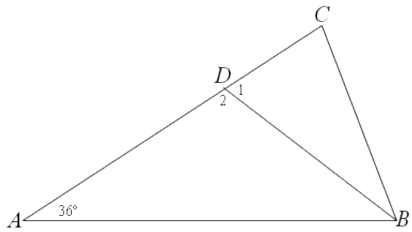
Opgave 38

Gegeven: $AC = BC = AB$
Bereken: $\angle A$



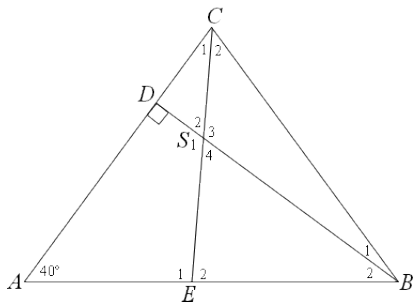
Opgave 39

Gegeven: $\angle A = 36°$, $AB = AC$, $BC = BD$
Bereken: $\angle D_2$



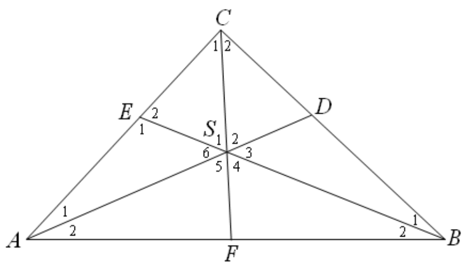
Opgave 40

Gegeven: $\angle A = 40°$, $\angle B = 70°$, $\angle D = 90°$,
CE is bissectrice van $\angle C$
Bereken: $\angle S_4$ en $\angle E_2$



Opgave 41

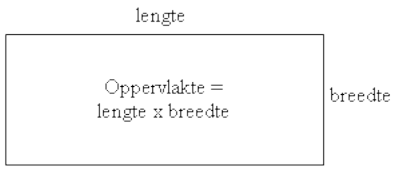
Gegeven: $\angle A = 52°$, $\angle B = 44°$,
AD is bissectrice van $\angle A$,
BE is bissectrice van $\angle B$,
CF is bissectrice van $\angle C$
Bereken: Alle hoeken in de figuur.



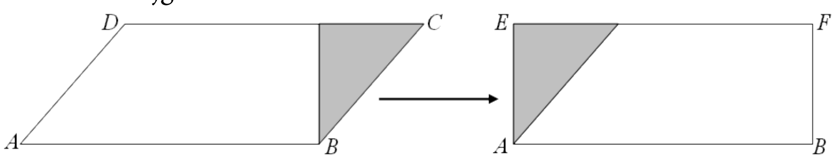
4.7 Gemengde opgaven

Ten slotte volgt hier een aantal kangoeroeopgaven waarin meetkundige figuren voorkomen. Soms moeten er hoeken uitgerekend worden. Bij veel opgaven speelt het begrip *oppervlakte* een rol. Hierbij moet je het volgende bedenken:

- Oppervlakte van een rechthoek is: lengte ×breedte

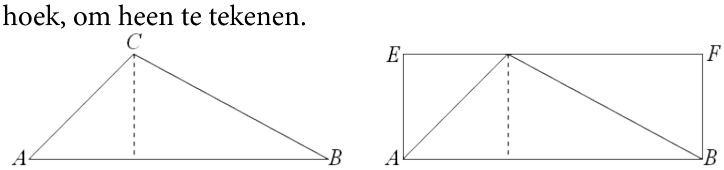


- Soms is het handig om de figuur (in gedachten) in stukken te knippen en op een andere manier weer neer te leggen, zodat je bijvoorbeeld een rechthoek krijgt.



$opp.ABCD = opp.ABFE = AB \times BF$

- Soms is het juist handig om er een andere figuur, bijvoorbeeld een rechthoek, om heen te tekenen.



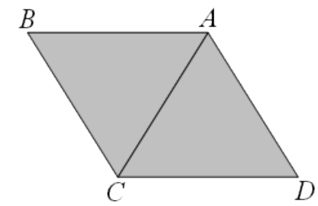
$opp.ABC = \frac{1}{2} \times opp.ABFE = \frac{1}{2} \times AB \times BF$

Opgave 42 *(Kangoeroe 2005)* De drie hoeken van een driehoek zijn samen 180°. Van een driehoek ABC is hoek A drie keer zo groot als hoek B en half zo groot al hoek C. Hoe groot is hoek A?

A)30° B)36° C)54° D)60° E)72°

Opgave 43 *(Kangoeroe 2004)*

De gelijkzijdige driehoek ACD wordt tegen de wijzers van de klok ingedraaid om punt A tot deze op driehoek ABC valt. Onder welke hoek wordt er gedraaid?



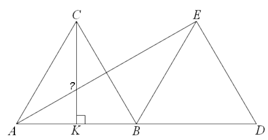
A)60° B)120° C)180° D)240° E)300°

Opgave 44 *(Kangoeroe 2004)* Esther tekent gelijkbenige driehoeken ABC met $AC = BC = 5cm$. De tophoek is groter dan 60°en de basis is een geheel aantal centimeters. Hoeveel verschillende driehoeken kan zij tekenen?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Opgave 45 *(Kangoeroe 2002)*

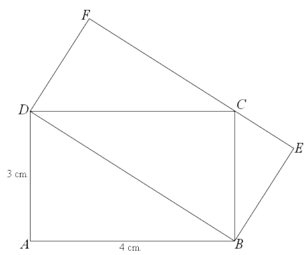
De driehoeken ABC en BDE zijn gelijkzijdig. B is het midden van AD en CK staat loodrecht op AB.
Hoe groot is de hoek met het vraagteken?



A)60° B)90° C)120° D)135° E)150°

Opgave 46 *(Kangoeroe 2005)*

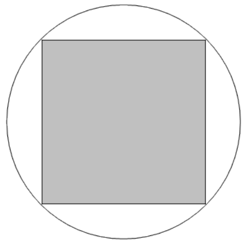
In de figuur zijn twee rechthoeken, $ABCD$ en $DBEF$, te zien. Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van rechthoek $DBEF$?



A) 10 B) 12 C) 13 D)14 E) 16

Opgave 47 *(Kangoeroe 2003)*

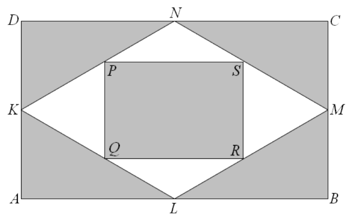
In een cirkel met een straal van $3cm$.is een zo groot mogelijke vierkant getekend.
Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van dat vierkant.



A) 9 B) 12 C) 15 D) 18 E) 21

Opgave 48 *(Kangoeroe 2002)*

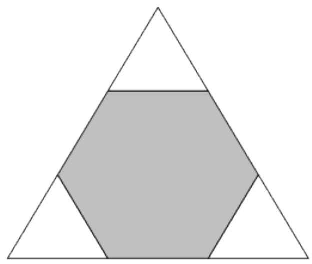
De punten K,L,M en N zijn de middens van de zijden van rechthoek $ABCD$.
Evenzo zijn P, Q, R en S de middens van de zijden van vierhoek $KLMN$.
Welk deel van rechthoek $ABCD$ is grijs gekleurd?



A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{5}{7}$ D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{6}$

Opgave 49 *(Kangoeroe 2001)*

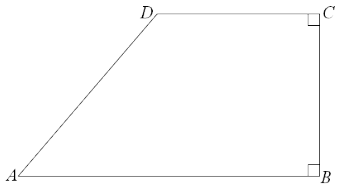
Gegeven is een driehoek, waarvan alle zijden de lengte 3 hebben. Hierin past precies een zeshoek met alle zijden 1.
De oppervlakte van de driehoek is dan ....keer de oppervlakte van de zeshoek.



A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{4}{3}$ D) $\frac{3}{2}$ E) 2

Opgave 50 *(Kangoeroe 2001)*

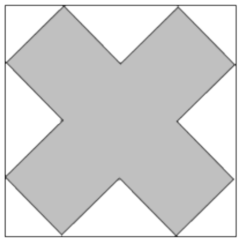
In het plaatje hiernaast zijn de hoeken B en C beide 90°. Driehoek BCD past 3 keer in vierhoek $ABCD$.
De oppervlakte van driehoek ABC is ....keer de oppervlakte van driehoek BCD.



A) 1 B) $\frac{3}{2}$ C) 2 D) $\frac{5}{2}$ E) 3

Opgave 51 *(Kangoeroe 2004)*

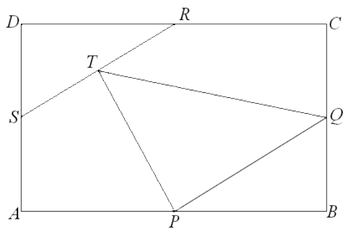
In een vierkant past precies een gelijkzijdige twaalfhoek in de vorm van een kruis. De omtrek van de twaalfhoek is 36 cm..
Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van het vierkant?



A) 48 B) 72 C) 108 D) 115,2 E) 144

Opgave 52 *(Kangoeroe 2003)*

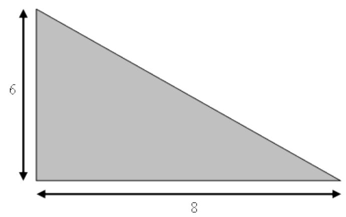
In rechthoek $ABCD$ zijn P, Q, R en S de middens van de zijden. T is het midden van lijnstuk RS.
De oppervlakte van $ABCD$ is 1. Wat is de oppervlakte van driehoek PQT?



A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{5}$ C) $\frac{1}{4}$ D) $\frac{5}{16}$ E) $\frac{3}{8}$

Opgave 53 *(Kangoeroe 2004)*

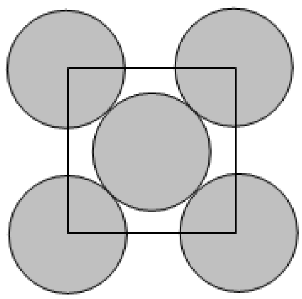
Hielke knipt uit een vel papier een driehoek. Twee van de zijden zijn 6 en 8 cm.; de hoek daartussen is recht.
Hij gaat de driehoek één keer vouwen. Hij kan dan heel veel verschillende figuren krijgen.
Welke van de volgende getallen kan de oppervlakte van een gevouwen figuur zijn?



A) 9cm^2 B) 12 cm^2 C) 18 cm^2 D) 24 cm^2 E) 30 cm^2

Opgave 54 *(Kangoeroe 2005)*

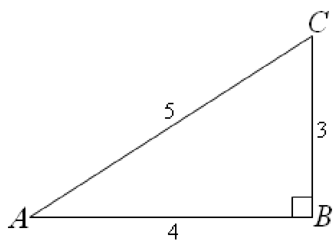
Vijf even grote grijze cirkels raken elkaar zoals hiernaast is getekend.
De middelpunten van de buitenste cirkels zijn de hoekpunten van het vierkant.
Welke deel van het grijze bebied ligt binnen het vierkant?



A) $\frac{1}{4}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{5}{9}$ D) $\frac{3}{5}$ E) $\frac{2}{3}$

Opgave 55 *(Kangoeroe 2001)*

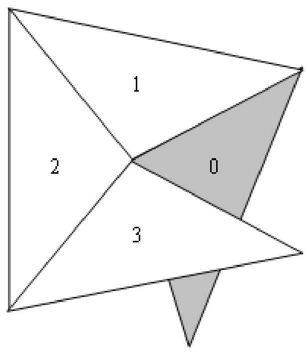
Een stuk papier heeft de vorm van een rechthoekige driehoek met zijden 3, 4 en 5 cm..
Je vouwt deze driehoek zo dat punt C op punt B terechtkomt en daarna nog eens zo dat punt A op punt B terechtkomt.
Wat is de vorm van de driehoek die op deze manier ontstaat?



A)vierkant B) vijfhoek C) zeshoek D) ruit E)rechthoek

Opgave 56 *(Kangoeroe 2003)*

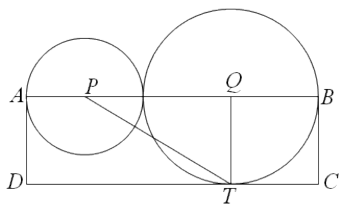
We maken een spiraal van gelijkbenige driehoeken met een tophoek van 100°.
We beginnen met de grijze driehoek, die we nummer 0 geven.
De volgende driehoeken, nummer 1, 2, 3, enz., leggen we telkens met één zijde tegen de vorige aan zoals hiernaast te zien is.
Je ziet dat nummer 3 gedeeltelijk over nummer 0 heen komt te liggen.
Welk nummer heeft de eerste driehoek die helemaal op nummer 0 komt te liggen?



A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) 18

Opgave 57 *(Kangoeroe 2002)*

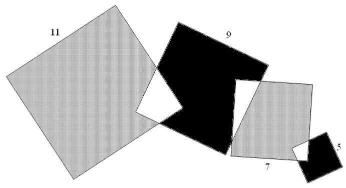
P en Q zijn de middelpunten van de cirkels en $ABCD$ is een rechthoek met oppervlakte 15.
Wat is de opppervlakte van driehoek PTQ?



A) $3\frac{1}{2}$ B) $3\frac{3}{4}$ C) 4 D) $4\frac{1}{4}$ E) $4\frac{1}{2}$

Opgave 58 *(Kangoeroe 2003)*

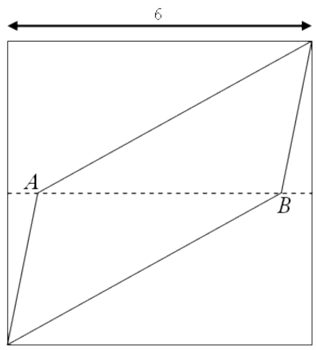
De vier overlappende vierkanten hebben achtereenvolgens zijden van 11, 9, 7 en 5 cm.
Hoeveel cm^2 is de totale oppervlakte van de grijze gebieden groter dan die van de zwarte gebieden?



A) 0 B) 25 C) 36 D) 49 E) 64

Opgave 59 *(Kangoeroe 2004)*

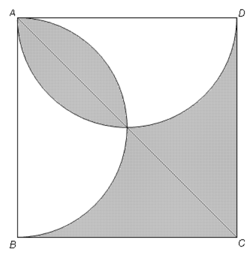
Een vierkant blaadje van 6 bij 6 cm. wordt dubbelgevouwen.
De punten A en B liggen op de vouwlijn; ze worden verbonden met twee van de hoeken van het blaadje.
Zo ontstaan er drie gebieden met gelijke oppervlakte. Hoeveel cm. liggen A en B van elkaar?



A) 3,6 B) 3,8 C) 4,0 D) 4,2 E) 4,4

Opgave 60 *(Kangoeroe 2005)*

In vierkant $ABCD$ met zijden van 2 cm. worden twee halve cirkels getekend met diameters AB en AD.
Hoeveel cm^2 is de oppervlakte van het grijze gebied?



A) $\frac{3}{4}$ B) 1 C) $\frac{\pi}{2}$ D) 2 E) 2π

Hoofdstuk 5

Het Assenstelsel

5.1 Het Assenstelsel

In dit hoofdstuk gaan jullie kennismaken met het cartesisch assenstelsel. Dit assenstelsel is een idee van de Franse filosoof en wiskundige René Descartes (1596-1650). Zo'n assenstelsel maakt het mogelijk om algebra te gebruiken voor het beschrijven van meetkundige vraagstukken en andersom.

Descartes was ervan overtuigd dat alle ware kennis op wiskunde gebaseerd kon worden en hij heeft als één der eersten geprobeerd het universum wiskundig te beschrijven. Descartes heeft in Nederland gewoond en gewerkt, o.a. in Franeker, Harderwijk, Deventer, Utrecht, Leiden, Amersfoort, Amsterdam, Leeuwarden en Egmond.

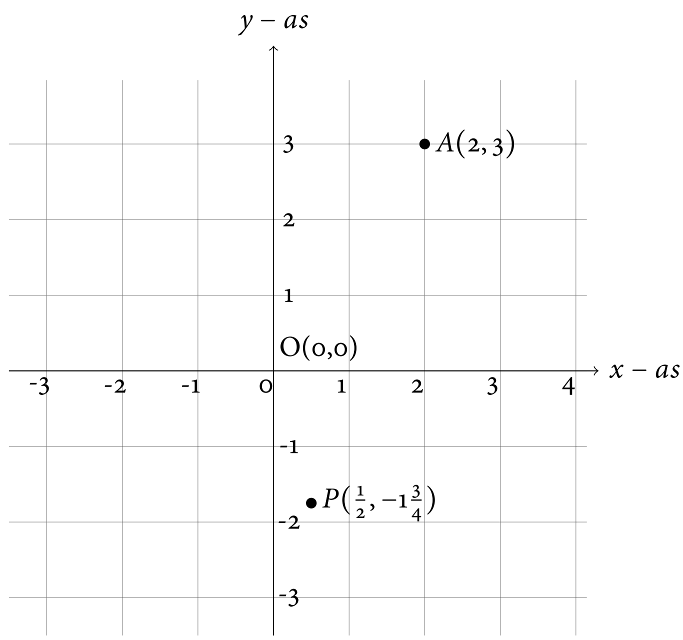
Het assenstelsel bestaat uit *twee loodrecht op elkaar staande getallenlijnen*, de **coördinaatassen** geheten, ook wel kortweg de *assen* genoemd (zie de figuur). De horizontale coördinaatas noemen we (traditioneel) de x-*as*, en de verticale as noemen we de y-*as*. Het snijpunt van deze assen noemen we de **oorsprong.** Bij dat punt schrijven we de hoofdletter O.

Bij elk punt in het vlak horen nu twee getallen. En die getallen schrijven we tussen haakjes en met een komma ertussen. Je kunt die twee getallen opvatten als een soort adres van dat punt. Deze getallen worden de **coördinaten** van het punt genoemd.

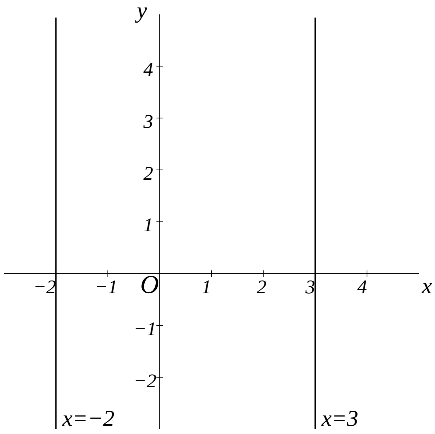
Kijk eens in het plaatje naar punt A. A is het snijpunt van een horizontale lijn en van een verticale lijn. De verticale lijn gaat door het punt op de x-as waar een 2 bij staat en de horizontale lijn gaat door een punt op de y-as waar een 3 bij staat. Daarom zullen we A het "adres" (2,3) meegeven. Het eerste getal, in dit geval de 2, heet de de x-**coördinaat** van A en het tweede getal, de 3 dus, heet de y-**coördinaat** van A. Je snapt nu wel dat ieder punt in het vlak **coördinaten** moet hebben. Zo zie je dat P dan de coördinaten $(\frac{1}{2}, -1\frac{3}{4})$ heeft. Even goed doordenkend begrijp je dan dat de **coördinaten** van een punt op de *x-as* altijd een y-**coördinaat** 0 heeft, en dat van een punt op de *y-as* juist de x-**coördinaat** 0 is. En de **oorsprong** moet dan de **coördinaten** $(0, 0)$ hebben.

Vaak noemen we de **coördinaten** van een punt direct achter de naam van dat punt. Bijvoorbeeld $A(2, 3)$.

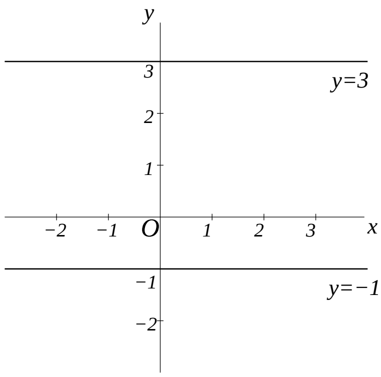
Horizontale lijnen en vericale lijnen welke de assen bij de gehele getallen snijden heten *roosterlijnen.* De snijpunten van roosterlijnen heten **roosterpunten**. Roosterpunten hebben daarom coördinaten welke gehele getallen zijn.



We hebben gezien dat alle punten waarvan de x-coördinaat 3 is, op een verticale lijn liggen welke bij de 3 door de *x-as* gaat. Deze verticale lijn zullen we daarom ook wel aangeven met de uitdrukking $x = 3$. En zo geeft b.v. $x = -2$, de verticale lijn aan welke bij -2 door de *x-as* gaat. Zie het plaatje hieronder.



Net zo zullen we de horizontale lijn waarvan de punten een y-coördinaat 3 hebben, aanduiden met $y = 3$.



Opgave 1

a) Teken een assenstelsel, neem voor de eenheden $1\frac{1}{2}$ cm.

b) Kleur in je assenstelsel alle punten rood waarvan de x-coördinaat 2 is.

c) Kleur in je assenstelsel alle punten groen waarvan de x-coördinaat -3 is.

d) Kleur in je assenstelsel alle punten blauw waarvan de y-coördinaat -1 is.

Opgave 2

a) Op welke lijn liggen alle punten waarvan de x-coördinaat 0 is?

b) En welke lijn is $y = 0$?

Opgave 3 Teken opnieuw een assenstelsel, neem voor de eenheden $1\frac{1}{2}$ cm.

a) Teken in je assenstelsel $A(2,1)$, $B(5,6)$, $C(0,3)$, $D(-5,6)$, $E(-2,1)$, $F(-5,-4)$, $G(0,-1)$, $H(5,-4)$ en teken figuur $ABCDEFGH$.

b) Teken door het punt $(0,-5)$ een horizontale lijn.

c) Geef nog drie punten op die lijn.

d) Teken door het punt $(7,0)$ een verticale lijn.

e) Geef nog drie punten op die lijn.

Opgave 4

a) Teken een assenstelsel met voor de eenheden $1\frac{1}{2}$ cm. Zet bij elke as de getallen 1 tot en met 10.

b) Teken de punten $A(1,1)$, $B(9,1)$, $C(9,9)$, $D(1,9)$, $E(5,1)$, $F(9,5)$, $G(5,9)$ en $H(1,5)$.

c) Teken figuur $ABCD$ en figuur $EFGH$.

d) $ABCD$ is een vierkant. Is $EFGH$ ook een vierkant?

Opgave 5 Beantwoord de volgende vragen zonder te tekenen:

a) Welk punt ligt drie eenheden rechts van het punt $P(4,8)$?

b) Welk punt ligt zeven eenheden onder het punt $Q(-2,-11)$?

c) Welk punt ligt dertien eenheden links van het punt $R(18,-21)$?

d) Welk punt ligt negen eenheden boven het punt $S(17,-12)$?

Opgave 6 We bekijken de punten $A(2,11)$, $B(5,8)$, $C(0,-4)$, $D(11,8)$, $E(9,0)$, $F(-1,4)$, $G(2,5)$, $H(-5,-4)$.

a) Van welk punt is de x-coördinaat 5?

b) Van welk punt is de y-coördinaat 11?

c) Welk punt ligt op de x-as?

d) Welk punt ligt op de y-as?

e) Welke twee punten liggen op dezelfde lijn evenwijdig aan de x-as?

f) Welke twee punten liggen op dezelfde lijn evenwijdig aan de y-as?

Opgave 7

a) Teken een assenstelsel met een x-as en een y-as. Neem als eenheid op beide assen $1\frac{1}{2}$ cm.

b) Teken de punten $A(2,3)$ en $B(6,4)$.

c) De punten A en B zijn de hoekpunten van een vierkant $ABCD$. Teken dat vierkant en geef de coördinaten van de hoekpunten C en D.

Opgave 8 Teken nog eens een assenstelsel, neem voor de eenheden $1\frac{1}{2}$ cm.

a) Kleur dat deel van het vlak geel, waarvoor geldt: $x > 3$.

b) Kleur dat deel van het vlak rood, waarvoor geldt: $y < 2$.

Opgave 9 Teken een assenstelsel met een x-as en een y-as. Neem als eenheid op beide assen $1\frac{1}{2}$ cm. Laat $x$en y lopen van -3 tot en met 3. Kleur in het assenstelsel alle punten zwart waarvan de x-coördinaat en de y-coördinaat gelijk zijn.

De lijn die je in de vorige opgave hebt getekend noemen we: **de lijn** $y = x$. Want op deze lijn liggen alle punten waarvan de x-coördinaat gelijk is aan de y-coördinaat. En de formule $y = x$ zegt eigenlijk precies hetzelfde!

De assen kunnen trouwens ook weleens andere namen krijgen dan x-as en y-as, bijvoorbeeld F-as en C-as of D-as en t-as.

Opgave 10 Teken de lijn met de formule $y = -x$ (d.w.z. teken die punten waarvoor geldt dat de x-coördinaat van zo'n punt tegengesteld is aan de y-coördinaat van dat punt).

Opgave 11 De punten $P(4,5)$, $Q(7,8)$ en $S(2,7)$ zijn de hoekpunten van een rechthoek.

a) Teken de rechthoek $PQRS$ en geef de coördinaten van het vierde hoekpunt R.

b) Welke roosterpunten liggen in de rechthoek?

c) Welke roosterpunten liggen op de zijden van de rechthoek?

Opgave 12

a) Schrijf de coördinaten op van de acht roosterpunten die rondom $P(2,6)$ liggen.

b) Welke vier roosterpunten liggen op een afstand 6 van P?

Opgave 13

a) Teken een assenstelsel met een x-as en een y-as en neem als eenheid 3 centimeter.

b) Teken in je assenstelsel de punten $A(\frac{1}{6}, 1\frac{1}{2})$ en $B(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$.

Opgave 14

a) Teken een assenstelsel en daarin de lijnen $x = 2$, $x = 3\frac{1}{2}$, $y = -1$ en $y = 4$.

b) Welke roosterpunten worden door deze lijnen ingesloten?

Opgave 15

a) Wat kun je zeggen over de coördinaten van de roosterpunten op de lijn $x = 6$?

b) Wat kun je zeggen over de coördinaten van de roosterpunten rechts van de lijn $x = 6$?

c) Wat kun je zeggen over de coördinaten van álle punten rechts van de lijn $x = 6$?

Opgave 16

a) Teken het **parallellogram** $OABC$ met hoekpunten $O(0, 0)$, $A(6, -\frac{1}{2})$, $B(5, 3\frac{1}{2})$ en $C(-1, 4)$.

b) Waarom heet deze vierhoek een parallellogram, denk je?

c) Vermenigvuldig van elk hoekpunt de eerste coördinaat met $-\frac{1}{2}$ en de tweede met -2. Vul de coördinaten in die je dan krijgt: $P(\ , \ )$, $Q(\ , \ )$, $R(\ , \ )$ en $S(\ , \ )$.

d) Teken vierhoek $PQRS$. Wat voor soort vierhoek is dit?

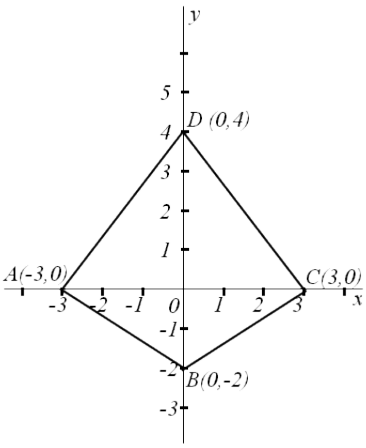
e) Wat zijn de coördinaten van het snijpunt van de diagonalen van vierhoek $OABC$?

f) Wat zijn de coördinaten van het snijpunt van de diagonalen van vierhoek $PQRS$?

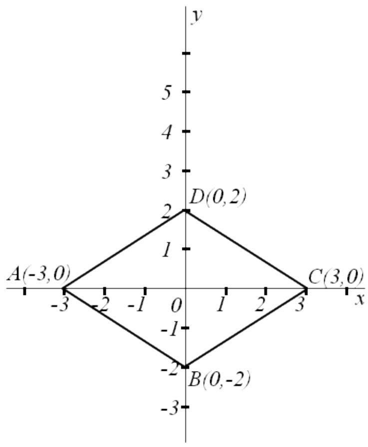
5.2 Lijnsymmetrie en puntsymmetrie

In hoofdstuk 4 heb je al verschillende soorten symmetrie gezien bij driehoeken en vierhoeken. Hieronder laten we van nog drie bijzondere vierhoeken zien dat het lijn- en/of punt-symmetrische figuren zijn en gebruiken daarbij het assenstelsel.

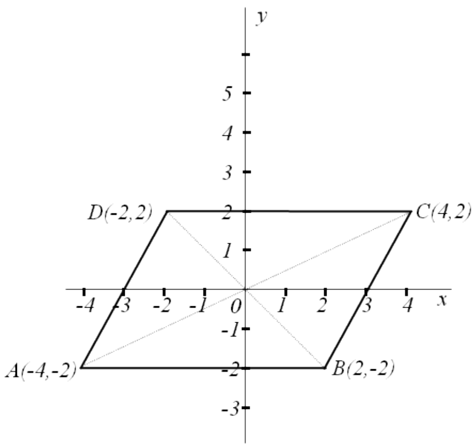
Vlieger $ABCD$ is lijnsymmetrisch met één symmetrie-as, namelijk $x = 0$ (dus de y-as).



Ruit $ABCD$ is lijnsymmetrisch met twee symmetrie-assen, namelijk $x = 0$ (de y-as) en $y = 0$ (de x-as).



Parallellogram $ABCD$ is puntsymmetrisch met punt van symmetrie O(0,0).



Opgave 17 a) Teken een gelijkbenige $\triangle ABC$ met $A(-1,0)$ en $B(5,0)$, en een zelfgekozen punt C. Ga er vanuit dat AB de basis is.

b) Welke lijn is de symmetrie-as van $\triangle ABC$?

De symmetrie-as wordt ook wel spiegel-as genoemd. Bedenk zelf waarom! Zo kun je bij de vlieger punt A(-3,0) en C(3,0) elkaars (spiegel)beeld noemen bij spiegeling in de lijn x= 0.

Opgave 18 Welke punten zijn elkaars spiegelbeeld bij de ruit (hierboven)? Schrijf de letters op met de coördinaten en vermeld welke lijn de spiegel-as is.

Voorbeeld

Spiegelen in een lijn

Gegeven zijn de punten $A(2,1)$, $B(1,-1)$ en $C(-2,-2)$.

De punten A, Ben C zijn gespiegeld in de y-as. Het beeld van A is $A'(-2,1)$, het beeld van B is $B'(-1,-1)$en het beeld van C is $C'(2,-2)$.

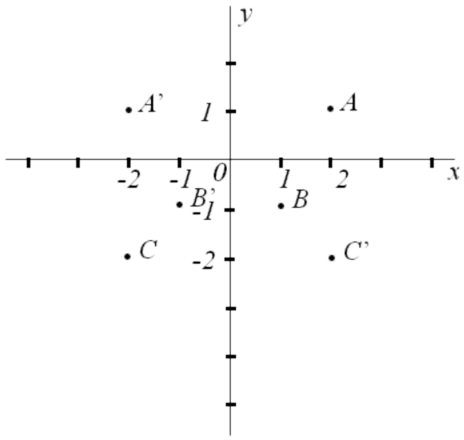


fig. a

De punten A, B en C zijn gespiegeld in de lijn $x = y$. Het beeld van punt A is $A'(1,2)$, het beeld van B is $B'(-1,1)$en het beeld van C is $C' = C$.

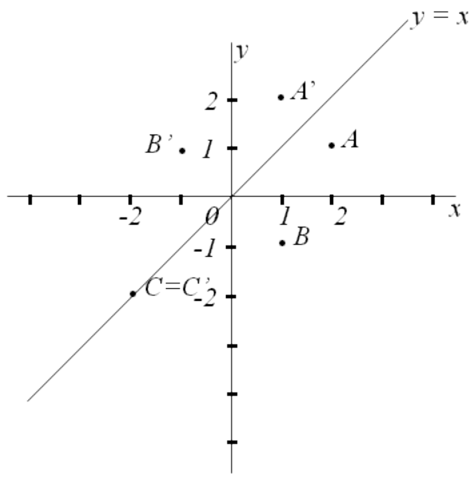


fig. b

Het punt $A(2,1)$ is gespiegeld in de lijn $y = -2$. Het beeld van A is , $A'(2,-5)$het beeld van B is $B'(-1,-3)$en het beeld van $C$is $C' = C$.

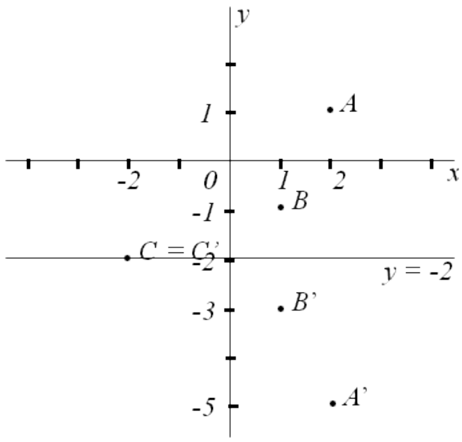
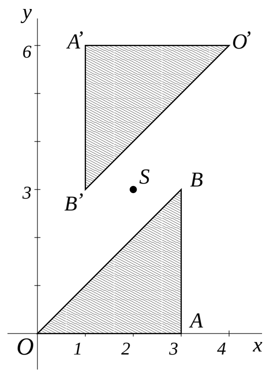


fig. c

Opgave 19 Teken, in je boek (met potlood!), in de figuren a, b en c $\triangle ABC$en $\triangle A'B'C'$. Zie je dat de driehoeken elkaars spiegelbeeld zijn?

Voorbeeld

Spiegelen in een punt



- Punt $A(3,0)$ is gespiegeld in punt $S(2,3)$. Het beeld is $A'(1,6)$.
- Punt $O(0,0)$ is gespiegeld in punt $S(2,3)$. Het beeld is $O'(4,6)$.
- Punt $B(3,3)$ is gespiegeld in punt $S(2,3)$. Het beeld is $B'(1,3)$.
- De driehoek $\triangle OAB$ is gespiegeld in punt $S(2,3)$. Het beeld is $\triangle O'A'B'$.

Opgave 20

a) Teken een assenstelsel met eenheid 1cm. en de oorsprong in het midden van de bladzijde.

b) Teken $\triangle ABC$ met A(3,0), B(4,2) en C(0,5).

c) Spiegel $\triangle ABC$ in de lijn y= 0. Je krijgt zo $\triangle A'B'C'$.

d) Spiegel $\triangle A'B'C'$in de lijn x= 0. Je krijgt zo $\triangle A"B"C"$.

e) Spiegel $\triangle A"B"C"$ in het punt O(0,0). Welk driehoek krijg je nu als beeld?

Opgave 21

a) Teken de lijn l waarvan alle punten y-coördinaat 3 hebben.

b) Spiegel l in de x-as. Noem het beeld k.

5.3 Het verband tussen x en y in een formule

5.3.1 Verbanden

In het hoofdstuk over algebra hebben jullie kennis gemaakt met de formule $F = \frac{9}{5}C + 32$. Deze formule geeft het verband weer tussen de temperatuur in graden Celcius en die in graden Fahrenheit.

Een ander voorbeeld van een formule is: $y = 2x$. Dit kan van alles betekenen. Stel dat een aardige vader of moeder tegen je zegt: “Ieder bedrag dat je in je spaarvarken stopt, verdubbel ik.” In de formule is dan y het bedrag in je spaarpot en x het bedrag dat je er zelf in deed. De formule $y = 2x$ geeft het verband tussen x en y.

5.3.2 Tabellen

Je kunt het verband tussen x en y ook in een tabel weergeven:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	2	4	6	8	10	12	14	16

Bij iedere x hoort een y, y is steeds tweemaal zo groot als x: $y = 2x$.

Zo’n verband kan ook ingewikkelder zijn, zie de volgende formules:

$$\begin{aligned} y &= 3x + 1 \\ y &= -2x + 2 \\ y &= -x + 2. \end{aligned}$$

Opgave 22 Maak tabellen bij onderstaande formules, neem x van 0 tot 10.

a) $y = 2x + 1$

b) $y = -2x + 2$

c) $y = -x - 1$

Opgave 23 Maak tabellen bij onderstaande formules, neem x van -5 tot 5.

a) $y = 3x + 2$

b) $y = -3x - 3$

c) $y = -x$

Opgave 24 Welke formules horen bij de volgende tabellen?

a)

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	3	5	7	9	11	13	15	17

b)

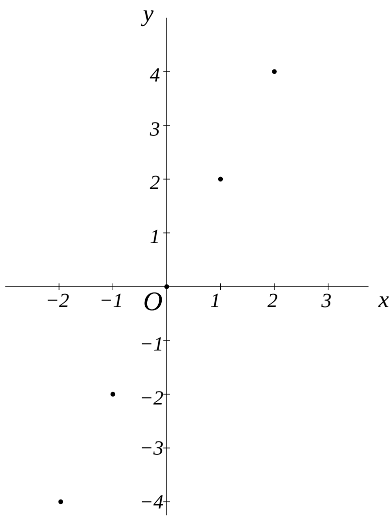
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	3	6	9	12	15	18	21	24

5.4 Grafieken

We kijken nog eens naar de formule $y = 2x$ en naar de bijbehorende tabel:

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	2	4	6	8	10	12	14	16

Steeds horen een x en een y bij elkaar, ze vormen getallenparen: $(-3, -6)$, $(-2, -4)$, $(-1, -2)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$, $(2, 4)$, enz. Deze getallenparen kunnen we opvatten als coördinaten van punten en dan kunnen we ze in een assenstelsel tekenen!



Natuurlijk kan de tabel worden uitgebreid zo ver je maar wilt:

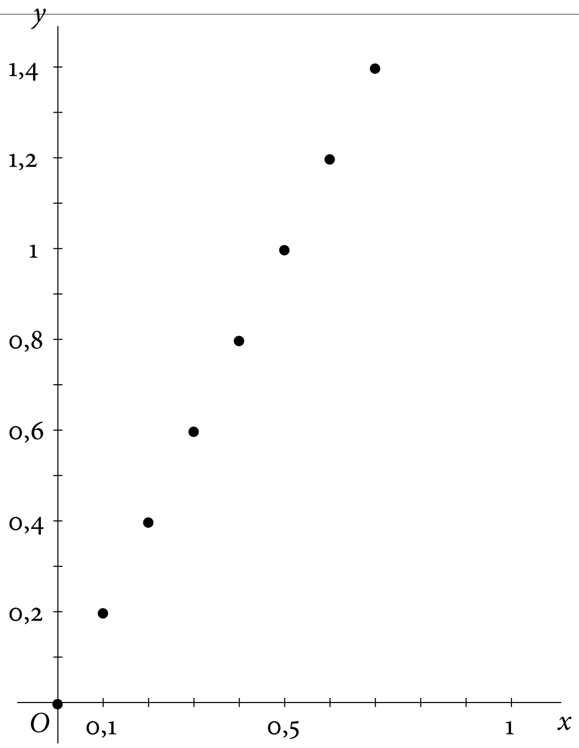
x	-300	-100	3000
y	-600	-200	6000

of

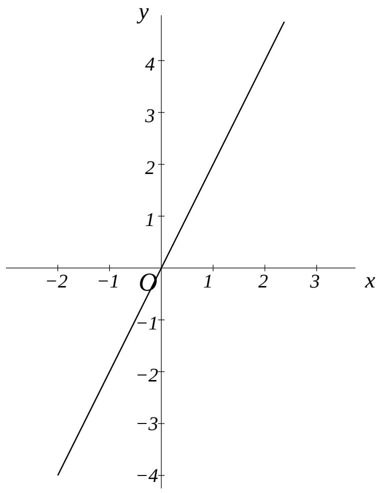
x	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
y	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2

Nu vormen we de getallenparen: $(0, 0)$, $(0,1; 0,2)$. Let op het scheidingsteken de puntkomma.

Inzoomen op het assenstelsel laat nu nog meer punten zien:



Zo kunnen we, als we willen, doorgaan. Als we alle mogelijke punten erin zetten, krijgen we een oneindig lange rechte lijn. Van die oneindig lange lijn tekenen we altijd maar een eindig stukje. Die lijn noemen we de **grafiek** van $y = 2x$.



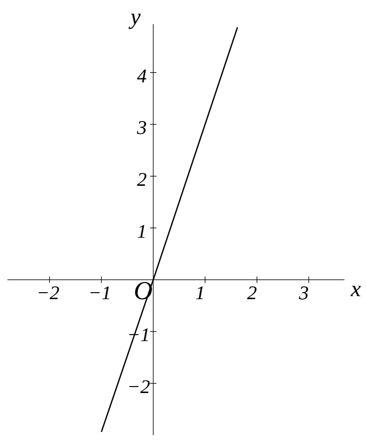
Opgave 25 a) Maak bij elk van de volgende formules een tabel. Neem voor x getallen van -4 tot 4.

(1) $y = 2x - 3$
(2) $y = x$
(3) $y = -0,5x - 1$

b) Teken van elk van bovenstaande formules de grafiek in één assenstelsel.

Opgave 26

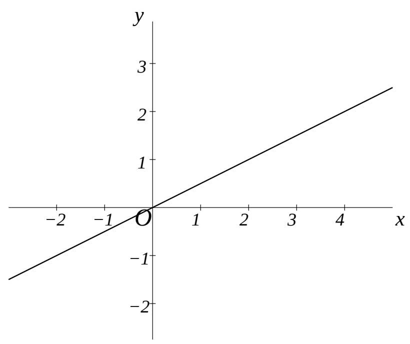
Het is ook mogelijk om bij een gegeven lijn de juiste formule te vinden. Bij de lijn die hieronder is getekend, hoort de formule $y = 3x$. We schrijven ook wel kortweg *l:* $y = 3x$.



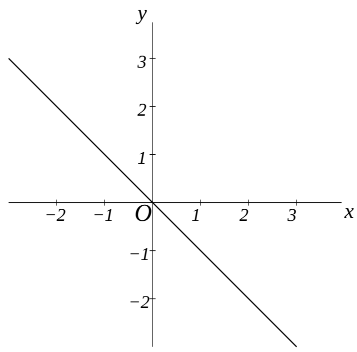
Leg uit hoe je deze formule aan de hand van de grafiek kunt vinden.

Opgave 27 Bedenk bij elk van de volgende grafieken de juiste formule.

a)



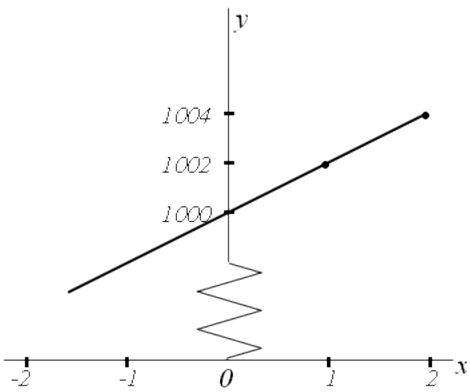
b)



Voorbeeld Bij de formule $y = 2x + 1000$ hoort onderstaande tabel:

x	-1	0	1	2
y	998	1000	1002	1004

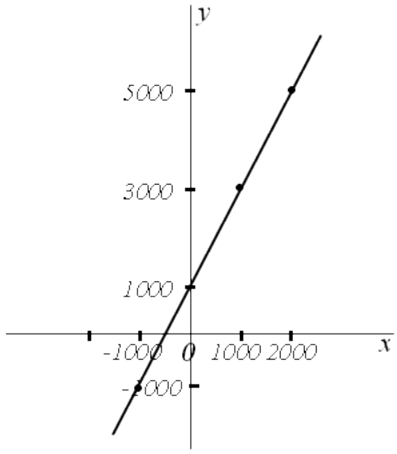
Hoe moet je dit tekenen?
Vaak wordt de oplossing gevonden met een zogenoemde scheurlijn:



Maar je kunt ook een andere tabel maken:

x	-1000	0	1000	2000
y	-1000	1000	3000	5000

Met bijbehorende grafiek:



Opgave 28 Gegeven is de formule $y = 6x + 120$.

a) Vul de volgende tabel in:

x	-20	-10	0	10	20
y					

b) Teken de grafiek.

Opgave 29 Gegeven is de formule $y = \frac{5}{8}x - 5$.

a) Vul de volgende tabel in:

x	-16	-8	0	8	16
y					

b) Teken de grafiek.

Opgave 30 Teken in verschillende assenstelsels de grafieken van onderstaande formules. Let op:

- Maak zelf een tabel, waarin je de getallen voor x zo kiest dat je geen breuken krijgt en dat er geen scheurlijn nodig is.
- Zet de juiste letters bij de assen.

a) $p = -\frac{2}{3}q + 4$, dus ga er nu vanuit dat de horizontale as de $q - as$ is, en dat de vertikale as de $p - as$ is.

b) $y = 3x + 180$

Opgave 31

a) Teken een assenstelsel met een x-as en een y-as en neem als eenheid één centimeter.

b) Kleur het gebied rood waarvoor geldt: $x > y$.

Opgave 32
a) Teken een assenstelsel zoals in de vorige opgave.
b) Teken alle punten waarvoor geldt: $x + y = 5$.
c) Kleur het gebied grijs waarvoor geldt: $x + y < 5$.

Opgave 33
a) Teken weer een assenstelsel zoals in de vorige opgave.
b) Kleur het gebied grijs waarvoor geldt: $y > 2x$.

Niet alle verbanden hebben als grafiek een rechte lijn. Het verband $y = x^2$ bijvoorbeeld heeft als grafiek een *parabool*. Zulke parabolen gaan jullie nu tekenen.

Opgave 34
a) Vul onderstaande tabel voor de formule $y = x^2$ verder in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	9	4					

b) Teken de bijbehorende zeven punten in een assenstelsel.
c) Verbind de punten door een vloeiende kromme.

Opgave 35 Gegeven is de formule $y = x^2 + 3$.
a) Controleer dat bij $x = -4$ hoort $y = 19$.
b) Welke y hoort bij $x = 4$?
c) Wat valt op als je de antwoorden van a en b vergelijkt?

Opgave 36 Gegeven is de formule $y = x^2 - 1$.
a) Vul de volgende tabel in:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

b) Beschouw de getallenparen in de tabel weer als coördinaten van punten en teken die in een assenstelsel.
c) Teken de grafiek van $y = x^2 - 1$.

Opgave 37 Gegeven is de formule $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$.
a) Vul de tabel in.

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y									

b) Teken de bijbehorende punten in een assenstelsel.
c) Teken de grafiek van $y = \frac{1}{2}x^2 + 1$.

Opgave 38 Gegeven is de formule $y = -x^2 + 2$.

a) Maak een tabel.

b) Teken de grafiek van $y = -x^2 + 2$.

Opgave 39 Gegeven is de formule $y = (x - 4)^2$.

a) Vul de tabel in.

x	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y											

b) Teken de grafiek van $y = (x - 4)^2$.

5.5 Gemengde opgaven

Opgave 40

a) Teken de lijn l waarvan alle punten dezelfde x- en y-coördinaat hebben. Geef de formule van l.

b) Teken de lijn k loodrecht op l en door O. Geef de formule van k.

c) Teken in hetzelfde stelsel $A(-2,-2)$, $B(2,-2)$, $C(2,2)$ en driehoek ABC.

d) Bedenk een voorschrift voor de punten die binnen deze driehoek liggen. Let op: dit voorschrift bestaat uit drie formules (aanwijzing: de eerste formule is $y > -2$).

Opgave 41

a) Teken de lijn l waarvan alle punten een x-coördinaat hebben die één groter is dan de y-coördinaat.

b) Vul de tabel in en geef de formule van l.

x	-2	-1	0	1	2
y					

c) Spiegel lijn l in de oorsprong door enkele punten te spiegelen. De gespiegelde lijn noemen we het beeld l' van l.

d) Bedenk een formule voor de lijn l'.

Opgave 42

a) Teken de punten $A(1,-2)$, $B(7,-2)$, $C(7,2)$, $D(1,2)$ en teken rechthoek $ABCD$.

b) Teken de diagonalen van de rechthoek. Het snijpunt van de diagonalen is M. Wat zijn de coördinaten van M?

c) Het punt F ligt 2 links van A. Teken rechthoek $ADEF$. Wat zijn de coördinaten van E?

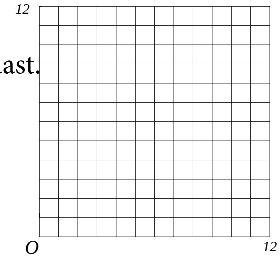
d) Van rechthoek $PQRS$ liggen P en S op de y-as. Als je nu ook nog weet dat de diagonalen PR en QS elkaar snijden in M, dan is er maar één rechthoek $PQRS$ mogelijk. Teken deze rechthoek.

Opgave 43

a) Gegeven is $y = -5x^2$. Bereken y voor $x = 6$.

b) Gegeven is $y = (x - 11)^2$. Bereken y voor $x = 4$.

c) Gegeven is $y = x^2 - 11$. Bereken y voor $x = -8$.



Opgave 44 We bekijken het begrensde rooster hiernaast.

a) Hoe lang (uitgedrukt in eenheden) is een kortste route <u>langs roosterlijnen</u> van $(3,4)$ naar $(10,10)$? En van $(2,11)$ naar $(7,5)$?

b) Welke roosterpunten liggen op een afstand 3 van $(6,5)$?

c) Hoe groot is de oppervlakte van één hokje? En van het hele rooster?

d) Teken in het rooster een rechthoek met zijden 4 en 7. Hoe groot is de omtrek en de oppervlakte van deze rechthoek?

e) Teken drie (echt verschillende) rechthoeken waarvan de oppervlakte 12 is.

f) Welke rechthoek met oppervlakte 12 heeft de kleinste omtrek? Hoe groot is deze omtrek?

Opgave 45 Bij een windsnelheid van meer dan 30 meter per seconde (afgekort met m/s) spreekt het KNMI van een orkaan.

a) Hoeveel kilometer per uur is 30 m/s ?

b) Snelle sprinters lopen de 100 meter in 10 seconden. Wat is hun gemiddelde snelheid in km/u ?

c) Stel je wandelt met een snelheid van 1 m/s. Wat is die snelheid in km/u ?

d) Vul de tabel in.

m/s	1	10	20	30
km/u				

Welke formule hoort hierbij? Neem voor x de snelheid in m/s en voor y de snelheid in km/u.

e) Geluid plant zich door de lucht voort met een snelheid van 342 m/s. Bereken hoeveel km/u dat is.

f) Teken de grafiek die hoort bij de formule. Zet m/s bij de x-as en km/u bij de y-as.

g) De maximumsnelheid op autowegen is 100 km/u. Lees uit de grafiek af hoeveel m/s dat ongeveer is.

Opgave 46 Gegeven is de formule $y = -3x + 6$.

a) Maak een tabel bij deze formule. Neem $x = -2, -1, \ldots, 4, 5$.

b) Teken de punten die uit de tabel volgen. Teken door deze punten de grafiek van $y = -3x + 6$.

Opgave 47 Zoals we inmiddels weten, wordt het verband tussen de temperatuur in graden Celcius en in graden Fahrenheit gegeven door de formule $F = \frac{9}{5}C + 32$.

a) Vul de tabel in.

C	0	10	20	30	100
F					

b) Teken de grafiek van de formule.

c) Bereken het aantal graden Celcius dat hoort bij 131 graden Fahrenheit.

d) Maak de formule die hoort bij het omzetten van graden Fahrenheit in graden Celcius.

Opgave 48 We bekijken de punten $A(6, -7)$, $B(-51, 7)$, $C(0, 11)$, $D(63, 63)$, $E(24, -14)$, $F(6, 0)$ en $G(-19, 11)$.

a) Welke punten hebben dezelfde x-coördinaat?

b) Welke punten hebben dezelfde y-coördinaat?

c) Welke punten liggen links van F?

d) Welke punten liggen 18 hoger dan A?

e) Welk punt ligt op de lijn $y = x$?

f) Wat zijn de coördinaten van het midden van lijnstuk BD?

Opgave 49 Omdat de snelheid van licht groter is dan die van geluid, zie je bij onweer eerst de bliksem en hoor je even later pas de donder. Hoever het onweer verwijderd is, bereken je met de formule $A = t : 3$, met A de afstand in kilometers en t de tijd in seconden.

a) Als je nu $4\frac{1}{2}$ seconden telt tussen bliksem en donder. Hoeveel kilometer is het onweer dan van je verwijderd?

b) Vul de tabel in.

t	3	6	12	15
A				

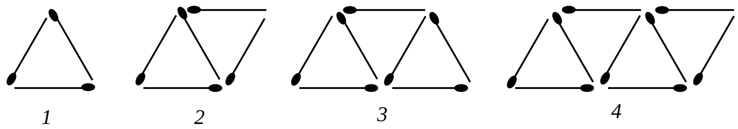
c) Welke bewering hieronder is waar, A of B?

A Elke 3 seconden neemt de afstand met 1 kilometer toe.

B Elke seconde neemt de afstand met 3 kilometer toe.

d) Teken de grafiek van deze formule.

Opgave 50 Met lucifers kunnen we figuren maken zoals hieronder. Zoals je misschien ziet, zit er regelmaat in de rij.



a) Teken de volgende twee figuren uit de rij.

b) Vul de tabel in.

nummer figuur	1	2	3	4	5	6	7
aantal lucifers							

c) Hoeveel lucifers zijn er nodig voor figuur 9? En figuur 12? En figuur 0?

d) Een zeker figuur is gemaakt met 99 lucifers. Hoeveel lucifers zijn er nodig voor de volgende figuur?

e) Geef de formule die het verband geeft tussen het nummer van de figuur en het aantal lucifers dat nodig is voor die figuur.

Opgave 51 Gegeven is de formule $y = 4x + 7$.

a) Neem $x = -2$. Bereken y.

b) Neem $x = -1$. Bereken y.

c) Neem $y = 11$. Bereken x.

d) Neem $y = 7$. Bereken x.

e) Vul de tabel in.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y							

f) Teken de grafiek van $y = 4x + 7$.

Opgave 52 Gegeven is de formule $y = x^2 - 4$.

a) Vul de tabel in.

x	-5	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	3	6
y							

b) Neem $y = 21$. Welke twee getallen voor x horen daarbij?

Opgave 53 Gegeven is de formule $y = (x + 2)^2$.

a) Neem $x = -11$. Bereken y.

b) Neem $y = 49$. Bereken x. (Er zijn weer twee waarden mogelijk voor x, geef ze allebei.)

c) Vul de tabel in.

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y									

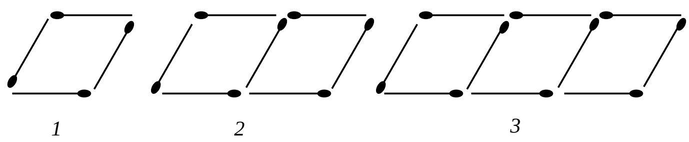
Opgave 54 Gegeven is de formule $y = 2x - 5$.

a) Vul de tabel in.

x	-1	0	1	2	3	4	5
y							

b) Teken de grafiek van $y = 2x - 5$.

Opgave 55 Bekijk de regelmatige rij:



a) Teken de volgende twee figuren uit de rij.

b) Vul de tabel in.

nummer figuur	1	2	3	4	5	6	7
aantal lucifers							

c) De volgende formule lijkt het verband te geven tussen het aantal lucifers en het nummer van de figuur:

$$l = 3n + 1,$$

met l het aantal lucifers en n het nummer van de figuur. Controleer dit voor figuur nummers 5, 6 en 7.

d) Uit hoeveel lucifers bestaat figuur nummer 50? En figuur nummer 1000?

e) Teken de grafiek van deze formule.

Opgave 56

a) Teken de punten $A(0,2)$ en $D(3,0)$ in een assenstelsel.

b) Spiegel AD in de beide assen en in de oorsprong. Verbind vervolgens alle hoekpunten. Alzo ontstaat vierhoek $ABCD$.

c) Wat voor soort vierhoek is $ABCD$?

Opgave 57 Gegeven zijn de formules $y = x^2$ en $y = -2x$.

a) Maak bij beide formules een tabel en teken de grafieken in één assenstelsel. Zet bij elke grafiek de bijbehorende formule.

b) De grafieken snijden elkaar in twee punten. Wat zijn de coördinaten van de snijpunten?

Opgave 58 Gegeven zijn de formules $y = x^2 + 1$ en $y = -x + 3$.

a) De formule $y = x^2 + 1$ is een kwadratische formule. Hoe heet de soort grafiek die hier bijhoort?

b) Maak bij beide formules een tabel

c) Teken de grafieken in één assenstelsel. Zet bij elke grafiek de bijbehorende formule.

d) De grafieken snijden elkaar in twee punten. Wat zijn de coördinaten van de snijpunten?

Opgave 59

a) Teken de punten $A(-1,1)$ en $D(0,3)$ en lijnstuk AD in een assenstelsel.

b) Spiegel de AD in de oorsprong. Noem het beeld CB.

c) Wat voor soort vierhoek is $ABCD$?

Opgave 60 Gegeven is de formule $y = 4(x+7)$.

a) Neem $x = 4$. Bereken y.

b) Neem $x = -5$. Bereken y.

c) Neem $y = 36$. Bereken x.

d) Neem $y = 12$. Bereken x.

Opgave 61 Teken de grafiek van de formule $xy = 30$. Maak eerst een tabel met negatieve en positieve getallen.

Opgave 62

a) Neem de volgende tabel over en vul hem verder in.

x	1	2	3	5	10	11	12	13	14	15	20	25
y	−1	−4	−9								−400	

b) Bedenk een formule die bij deze tabel hoort.

Opgave 63 Teken een assenstelsel met een x-as en een y-as en neem zowel x als y van −3 t/m 6.

a) Teken de lijn l: $y = \frac{1}{2}x$ en het punt $M(2,1)$.

b) Richt de loodlijn m op vanuit M op l. Noem het snijpunt van m met de x-as A, en het snijpunt van m met de y-as C.

c) Spiegel O in het punt M. Noem het beeld B.

d) Wat voor figuur is $OABC$? Noem de noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor een figuur zoals $OABC$.

Opgave 64

a) Teken lijn $l : y = 3x + 4$. Noem het snijpunt van l met de y-as A en met de x-as C.

b) Teken de lijn $m : y = -\frac{1}{2}x + 2\frac{1}{2}$. Noem het snijpunt van m met de x-as B en noem het snijpunt van l en m S.

c) Construeer de bissectrice b van $\angle ASB$.

d) Construeer het parallellogram $ASBD$. Noem de noodzakelijk en voldoende voorwaarden voor een parallellogram.

e) Teken de lijn $k : y = 3x$. Noem het snijpunt van m en k T, en teken $OTAC$. Wat voor een figuur is $OTAC$? Noem de noodzakelijke en voldoende voorwaarden voor een figuur zoals $OTAC$.

Opgave 65

a) Teken in een xy-stelsel het punt $C(0,3)$ en de lijn $l : x = \frac{1}{2}y$.

b) Wat zijn de noodzakelijk en voldoende voorwaarden voor een ruit?

Van de ruit $OABC$ is bekend dat B op l ligt.

c) Construeer $OABC$.

Opgave 66 Een leraar wil een groep leerlingen bij elkaar hebben. In de groep moeten er meer dan 3 jongens zitten. In de groep moeten minder dan 8 meisjes zitten. In de groep moeten meer meisjes dan jongens zitten. In de groep kunnen maximaal 11 leerlingen zitten. Het aantal meisjes kun je op de x-as zetten, het aantal jongens op de y-as.

a) Teken een assenstelsel met x van 0 tot +11 en y van 0 tot +11.

b) Teken de lijn $x = 8$.

c) Teken de lijn $y = 3$.

d) Teken de lijn $y = x$

e) Teken de lijn $x + y = 11$.

f) Arceer het gebied dat voldoet aan de vier voorwaarden die bovenaan zijn beschreven.

g) Schrijf op welke mogelijkheden er zijn voor deze groep.

Hoofdstuk 6

Algebra vervolg

6.1 Herhaling

Om het geheugen een beetje op te frissen begint dit hoofdstuk met herhalingsopgaven van de algebra die je al eerder hebt gehad.

Opgave 1 Herleid:

a) $-2a - 5a$

b) $3a^2 + a - a^2$

c) $\frac{2a}{b} + \frac{1}{2b}$

d) $\frac{60pr}{-24pqr}$

e) $-\frac{y}{ac} + \frac{4}{ab}$

f) $-\frac{4}{2a} \cdot \frac{ab}{c}$

Opgave 2 Herleid:

a) $-\frac{3}{8} \cdot -2\frac{2}{3}$

b) $\frac{a}{bc} : \frac{2}{b}$

c) $(-5qr)^2$

d) $(6z)^3 + z^3$

e) $2a : \frac{1}{b}$

f) $a \cdot \frac{1}{b}$

Opgave 3 Herleid:

a) $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}$

b) $-1\frac{3}{4} : \frac{a}{4}$

c) $2xy^3 \cdot 3x^2y$

d) $\frac{(-5a^6b)^3}{(-ab)^2}$

e) $\frac{6x^7+4x^7}{3x^4}$

f) $(-x)^6 - (x^2)^3$

Opgave 4 Herleid:

a) $15x^2y + 9x^2y$ c) $(ab)^7 + ab^7$ e) $\frac{-15pqr}{-5p} - 6q \cdot -5r$

b) $a^6 : a^2$ d) $\frac{2}{r} - \frac{3}{qr}$ f) $\frac{7p}{4q} \cdot -\frac{5x}{21y}$

Opgave 5 Herleid:

a) $-5a \cdot \frac{2b}{10y} + \frac{2}{ab}$ c) $-\frac{5m}{12n} : -\frac{2m}{5}$ e)$15m^2n^2 - 87mn^2$

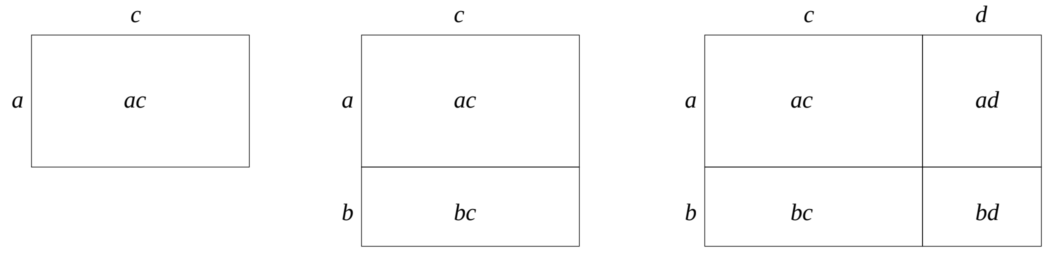
b) $\frac{-40p^5q^4}{-10p^2q^3}$ d) $\frac{24ab}{48bc} + x^2 \cdot \frac{2yz}{3cy}$ f)$(3x^5)^4(-2xy^4)^5$

Opgave 6 Herleid:

a) $\frac{-2x}{3y} \cdot -\frac{3y}{2x}$ c) $(a^3)^8 \cdot ab^2$ e) $(x^3y)^2 : \frac{x}{y}$

b) $\frac{-x}{2y} : -\frac{2y}{x}$ d) $(\frac{x}{y})^4 - (\frac{2}{y})^5 \cdot y$ f) $(\frac{pq^3}{(pq)^3})^3$

6.2 Haakjes wegwerken



a.c=ac *(a+b).c=ac+bc* *(a+b).(c+d)=ac+bc+ad+bd*

De verdeel-eigenschap

Bij een vermenigvuldiging waarbij één of meerdere factoren bestaan uit een optelling, wordt de vermenigvuldiging verdeeld over de optelling. De afbeelding maakt duidelijk waarom dat zo is.

Het maalteken tussen een variabele en een haakje of tussen twee haakjes wordt ook meestal weggelaten. Bijvoorbeeld:

$$2(x + y) = 2x + 2y$$

en

$$(x + 9)(x - 6) =$$

$$(x + 9)(x + -6) =$$

$$x^2 + -6x + 9x + -54 =$$

$$x^2 + 3x - 54$$

Opgave 7 Herleid:

a) $2 \cdot (60 + 4)$

b) $2 \cdot (x + 4)$

c) $6 \cdot (y - 2)$

d) $3 \cdot (5 - a)$

e) $-2 \cdot (z + 9)$

f) $(-y + 7) \cdot 6$

Opgave 8 Herleid:

a) $(x+2)(x+3)$ d) $(y+1)(y+18)$

b) $(b-1)(b-4)$ e) $(a-2)(a+8)$

c) $(3-c)(c+10)$ f) $(z-9)(z-4)$

Opgave 9 Herleid:

a) $a(b+c)$ d) $-x(x+z)$

b) $x(x-y)$ e) $-2y(2y+z)$

c) $-x(a-b)$ f) $3a(a-2b)$

Opgave 10 Herleid:

a) $(2b+1)(b+3)$ d) $(1-2y)(y+9)$

b) $(3x+5)(2x+2)$ e) $-(6x+4)(2-x)$

c) $(2a+3)(a-7)$ f) $5(a+3)(a-2)$

Opgave 11 Herleid:

a) $-(-2x-3y)$ d) $(x-y)(x+y)$

b) $-3a(17x-2y)$ e) $(2x-y)(x-2y)$

c) $(a+b)(a+c)$ f) $(a+b)(c+d)$

Opgave 12 Herleid:

a) $(2x-3y)(3x-2y)$ d) $-21x+(2+x)(y-10x)$

b) $(12x-3y)(12x-2y)$ e) $(2a^2+3a)(a+4)$

c) $2x-3x(y-2)$ f) $(x^2+3)(x-2)$

Merkwaardige producten

Sommige vermenigvuldigingen zijn een beetje speciaal en heten daarom merkwaardige producten. De herleidingen kunnen zonder tussenstappen worden opgeschreven.

a) $\mathbf{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$
immers:
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$(2x+3y)^2 =$

$4x^2 + 12xy + 9y^2$

b) $\mathbf{(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$
immers:
$(a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(x-3y)^2 =$

$x^2 - 6xy + 9y^2$

*Hierin noemen we $2ab$ en $-2ab$ het **dubbelproduct.***

c) $\mathbf{(a+b)(a-b) = a^2 - b^2}$
immers:
$(a+b)(a-b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$

$(b-3)(b+3) =$

$= b^2 - 9$

Opgave 13 Herleid:

a) $(y+3)^2$ d) $(z-1)^2$

b) $(x+2)(x-2)$ e) $(x-8)(x+8)$

c) $(z+1)^2$ f) $(b+10)^2$

Opgave 14 Herleid:

a) $(a+12)(a-12)$ d) $(p+19)^2$

b) $(-x-4)^2$ e) $(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})$

c) $-(2c+1)^2$ f) $(b-\frac{3}{4})^2$

Opgave 15 Herleid:

a) $(2x + y)^2$

b) $(2x - 3y)^2$

c) $(12x + 10y)^2$

d) $-(x + y)^2$

e) $(2x + y)(2x - y)$

f) $(ab - c)(ab + c)$

6.3 Alles door elkaar

Opgave 16 Herleid:

a) $3(2x + 5)$

b) $(b - 4)^2$

c) $(a + b)^2$

d) $(a - b)^2$

e) $(3p + 6)^2$

f) $(4a - 3)^2$

Opgave 17 Herleid:

a) $-5(a^2 + 2a)$

b) $-(5a^2 + 2a)$

c) $-7x(2x - 4)$

d) $(x - 7)(4x - 3)$

e) $(4a + 5)^2$

f) $(2x - 4)^2$

Opgave 18 Herleid:

a) $(a + 2)(a + 3) + 2a$

b) $(a - 1)(a - 2) - a + 4$

c) $(a - 3)(a + 5) - a^2 + 3$

d) $(a + 1)(a - 4) - a^2 + a$

Opgave 19 Herleid:

a) $(a + 5)^2 - 18$

b) $(a - 8b)(a + 8b) - a^2$

c) $7x^2 + (3x - 4)(3x + 4)$

d) $x^2 + (x - y)^2$

Opgave 20 Herleid:

a) $(4a + \frac{1}{3})(4a - \frac{1}{3})$

b) $(2x - y)(2x + y)$

c) $(\frac{2}{5}x + 4)(\frac{2}{5}x - 4)$

d) $(7y - \frac{2}{3})(7y + \frac{2}{3})$

Opgave 21 Herleid:

a) $(a + \frac{3}{5})(a - \frac{3}{5})$

b) $(\frac{1}{2}p + 2)(\frac{1}{2}p - 4)$

c) $(6a - \frac{1}{3})(6a - \frac{1}{3})$

d) $(8x - \frac{3}{4}y)(8x + \frac{3}{4}y)$

Opgave 22 Herleid:

a) $(x - 2y)(2x + y) + xy$ c) $(x - y)^2 + y(x - y)$

b) $(a + b)^2 - 2b^2$ d) $p + (1 + q)(1 - p) - q$

Opgave 23 Herleid:

a) $(p+1)(2p-3)-2(p^2-3)$ c) $(2x - 1)^2 + 4(x - 3)$

b) $(4y-3)(4y+3)-3(2y+4)$ d) $(3y + 2)^2 + (2y - 3)^2$

Opgave 24 Herleid:

a) $-3(2a + 6)(2a - 6)$ c) $\frac{1}{4}(2b + 8)^2$

b) $2(a - 3)^2$ d) $5(2a^2 - 3)(4a^2 + a)$

Opgave 25 Herleid:

a) $3a(a - 2) - (3a - 1)^2$ c) $(x - 3y)^2 - (3x + y)^2$

b) $(2p + 1)^2 - (2p - 1)^2$ d) $(3p + 5)^2 - (5p - 3)^2$

Opgave 26 Herleid:

a) $(a + 2)(a - 2)(a^2 + 4)$ c) $(a + 1)(a - 1)(a^2 - 1)$

b) $(x^2 + 9)(x - 3)(x + 3)$ d) $(p^4 - 4)(p^2 + 2)(p^2 - 2)$

6.4 Toepassingen van de algebra

6.4.1 Snelrekentrucs

Even snel: hoeveel is $59 \cdot 61$? Als je dit niet snel uit je hoofd kunt, dan is het handig gebruik te maken van haakjes producten:

$$61 \cdot 59 = (60+1)(60-1) = 3600 - 1 = 3599.$$

Immers: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$.
Even snel: hoeveel is 62^2 of 57^2 ? Wederom is het handig gebruik te maken van haakjesproducten:

$$\begin{aligned} 57^2 &= (60-3)^2 = 60^2 - 360 + 3^2 = 3600 - 360 + 9 = 3249 \\ 62^2 &= (60+2)^2 = 60^2 + 240 + 2^2 = 3600 + 240 + 4 = 3844. \end{aligned}$$

Immers: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Opgave 27 Bereken zoals hierboven:

a) 12^2 b) 18^2 c) $58 \cdot 62$ d) $57 \cdot 63$

Opgave 28 Bereken zoals hierboven:

a) 78^2 b) $36 \cdot 24$ c) 93^2 d) $82 \cdot 98$

Even snel: hoe kun je 19^2 of 49^2 of 31^2 nog anders snel berekenen?
Kijk maar eens:

$$\begin{aligned} 19^2 &= 18 \cdot 20 + 1 = 361 \\ 49^2 &= 48 \cdot 50 + 1 = 24 \cdot 100 + 1 = 2401 \\ 31^2 &= 30 \cdot 32 + 1 = 961. \end{aligned}$$

Immers: $(a-1)(a+1) + 1 = a^2 - 1 + 1 = a^2$.

Opgave 29 Bereken zo:

a) 11^2 b) 21^2 c) 99^2 d) 999^2

Snel berekenen van kwadraten die op een 5 eindigen

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 35^2 &= 30 \cdot 40 + 25 = 1225 \\ 65^2 &= 60 \cdot 70 + 25 = 4225 \\ 95^2 &= 90 \cdot 100 + 25 = 9025 \\ 115^2 &= 110 \cdot 120 + 25 = 13225. \end{aligned}$$

Immers: $(x+5)^2 = x^2 + 10x + 25 = x(x+10) + 25$, waarin voor x een tiental kan worden ingevuld.

Opgave 30 Bereken op deze manier direct uit je hoofd:

a) 15^2 b) 25^2 c) 75^2 d) 995^2

Snel vermenigvuldigen van twee getallen tussen 10 en 20

Voorbeeld:

$$\begin{aligned} 18 \cdot 13 &= 10(18+3) + 8 \cdot 3 = 210 + 24 = 234 \\ 13 \cdot 19 &= 10(13+9) + 3 \cdot 9 = 220 + 27 = 247 \\ 16 \cdot 16 &= 10(16+6) + 6 \cdot 6 = 256 \end{aligned}$$

Immers: $(10+a)(10+b) = 10 \cdot 10 + 10a + 10b + ab = 10(10+a+b) + ab$.

Opgave 31 Bereken op deze manier:

a) $17 \cdot 14$ b) $17 \cdot 17$ c) $13 \cdot 14$ d) $18 \cdot 19$

Even snel: hoeveel is $51 \cdot 59$ of $43 \cdot 47$ of $33 \cdot 37$? Als je dit niet snel uit je hoofd kunt, dan is het handig gebruik te maken van:

$$\begin{aligned} 51 \cdot 59 &= 50 \cdot 60 + 1 \cdot 9 = 3009 \\ 43 \cdot 47 &= 40 \cdot 50 + 3 \cdot 7 = 2021 \\ 34 \cdot 36 &= 30 \cdot 40 + 4 \cdot 6 = 1224 \end{aligned}$$

Merk op dat bovenstaande sommen steeds van de vorm $(x+a)(x+b)$ zijn, waarbij $a+b=10$. Nu geldt:

$$(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab = x^2 + 10x + ab = x(x+10) + ab.$$

Opgave 32 Bedenk zelf twee vermenigvuldigingen die je zo kunt uitrekenen. Laat de berekening zien.

6.4.2 Merkwaardige uitkomsten?

BEWERING: *Een getal tot de derde macht min het getal zelf is altijd een zesvoud.*

Maken we de tabel van de uitkomsten bij 1 tot en met 7, dan zie je dat deze uitkomsten in ieder geval deelbaar zijn door 6 (N staat voor het getal dat je neemt en y staat voor de uitkomst):

N	1	2	3	4	5	6	7
y	0	6	24	60	120	210	336

Opgave 33 Controleer de uitkomsten in de tabel.

Zal dit zo door blijven gaan of niet? Zo ja, kunnen we dit verklaren? Zo nee, bij welke N 'gaat het mis'?
Met behulp van de algebra kun je laten zien dat de bewering voor elk getal waar is.

Opgave 34

a) Herleid $N(N+1)(N-1)$.

b) $N-1$, N en $N+1$ zijn drie opeenvolgende getallen. Probeer te verklaren waarom het product van drie opeenvolgende getallen altijd deelbaar is door 6.

c) Leg uit waarom de bewering nu bewezen is.

Kijk eens naar het volgende rijtje sommen:

$$2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2$$
$$3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2$$
$$4 \cdot 5 - 3 \cdot 6 = 2$$
$$5 \cdot 6 - 4 \cdot 7 = 2$$
$$6 \cdot 7 - 5 \cdot 8 = 2$$

Een mooi rijtje nietwaar? Gaat dit zo eindeloos door? Zo ja, kun je dan de regelmaat beschrijven en aantonen dat deze juist is? Zo nee, waarom niet?

Het patroon dat zich aftekent loopt natuurlijk eindeloos door, alleen hoe toon je dat aan? Dat iets het geval is door het te laten zien voor een willekeurig voorbeeld is voor een wiskundige niet voldoende. Hij moet aantonen dat het voor *elk* willekeurig getal geldt.

Opgave 35 Met de algebra is dat nu een koud kunstje. Noem bijvoorbeeld het kleinste getal aan de linkerkant van het is-gelijk-teken in een regel n, dan staat er aan de linkerkant van het is-gelijk-teken:

$$(n+1)(n+2) - n(n+3).$$

Herleid dit (als je het goed doet komt er 2 uit).

Opgave 36 Probeer hetzelfde te doen voor het volgende rijtje sommen:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 3 + 1 &= 4 \\ 2 \cdot 4 + 1 &= 9 \\ 3 \cdot 5 + 1 &= 16 \\ 4 \cdot 6 + 1 &= 25 \\ 5 \cdot 7 + 1 &= 36 \end{aligned}$$

Nu staat er aan de linkerkant $n(n+2)+1$ en aan de rechterkant $(n+1)^2$. Laat zien dat $n(n+2)+1 = (n+1)^2$.

6.4.3 Delingen

De Negenproef: *Als de som van de cijfers van een getal deelbaar is door 9, dan is het getal zelf deelbaar door 9.*

Let op het verschil tussen de woorden *cijfer* en *getal*: ons getallenstelsel bestaat uit tien cijfers, namelijk 0 t/m 9 en een getal bestaat uit één of meer cijfers.

Voorbeeld: 567 is deelbaar door 9, want $5+6+7=18$ is deelbaar door 9.

We tonen de uitspraak eerst aan voor getallen bestaande uit drie cijfers, d.w.z. voor getallen van de vorm $\langle abc \rangle$ met a 100-tallen, b 10-tallen en c eenheden. Dus

$$\langle abc \rangle = 100a + 10b + c.$$

Bedenk dat $100a = (99a + a)$ en dat $10b = 9b + b$, dus $100a + 10b + c$ is hetzelfde als $99a + a + 9b + b + c$.

De volgorde van een optelling heeft geen invloed op de uitkomst ervan, dus

$$\langle abc\rangle = 100a + 10b + c = (99a + a) + (9b + b) + c = (99a + 9b) + (a + b + c).$$

De linkerkant is deelbaar door 9 als de rechterkant dat is. Nu is het eerste deel van de rechterkant $(99a + 9b)$ *altijd* deelbaar door 9. Het tweede deel is *alleen* deelbaar door 9 als $(a + b + c)$ (de som van de cijfers) deelbaar is door 9.

Conclusie: het getal $\langle abc\rangle$ is alleen deelbaar door 9 als de som van de cijfers deelbaar is door 9.

Opgave 37 Doe de negenproef bij de volgende getallen en controleer met een staartdeling of je conclusie klopt.

a) 2784

b) 1631

c) Kies zelf nog een paar getallen.

Bewering: *Als de som van de cijfers van een getal deelbaar is door 3, dan is het getal zelf deelbaar door 3.*

Voorbeeld: 567 is deelbaar door 3, want $5 + 6 + 7 = 18$ is deelbaar door 3.

Weer: $\langle abc\rangle = (99a + 9b) + (a + b + c)$.

De linkerkant is alleen deelbaar door 3 als de rechterkant dat is. $(99a+9b)$ is *altijd* deelbaar door 3. Als $(a + b + c)$ ook deelbaar is door 3, dan is $\langle abc\rangle$ deelbaar door 3.

Conclusie: het getal $\langle abc\rangle$ is alleen deelbaar door 3 als de som van de cijfers deelbaar is door 3.

6.4.4 Rekenraadsels

Er bestaan al eeuwenlang rekenraadsels waar je anderen mee kunt verrassen. Deze zijn met behulp van algebra te verklaren.

Opgave 38 a) Geef iemand de volgende opdrachten:

1. Neem een getal in gedachten
2. Tel daar 12 bij op.
3. Vermenigvuldig de uitkomst met 2.
4. Trek van het vorige antwoord 4 af.
5. Trek er tenslotte het dubbele van het begingetal af.

b) Verklaar m.b.v. algebra dat er steeds hetzelfde antwoord uit komt.

Hint: Noem het begingetal n.

Opgave 39 Raad een Kwadraat

a) Geef iemand de volgende opdrachten:
   1. Neem een natuurlijk getal en kwadrateer het.
   2. Kwadrateer ook het eerstvolgende natuurlijke getal.
   3. Bereken het verschil.
   4. Trek van het vorige antwoord 1 af.
   5. Deel dit tenslotte door 2.
   6. Het eindantwoord is het eerste natuurlijke getal.

b) Verklaar dit met algebra.

Hint: Noem het eerste natuurlijke getal n.

6.4.5 Voor de toekomstige snelrekenaars

Snel berekenen van kwadraten tussen 50 en 75

Voorbeeld: 56^2.

Neem het verschil van 56 en 50. Dat is 6. Tel 6 bij 25 op, dat is 31. Bereken 6^2, dat is 36. Het antwoord is nu 3136.

Algemeen: a^2 (a tussen 50 en 75)

1. Bereken het verschil van het getal a en 50.	1. $a - 50$
2. Tel dit verschil op bij 25 → honderdtallen.	2. $25 + a - 50 = a - 25 \rightarrow 100(a - 25)$
3. Bereken $(a - 50)^2$ → eenheden.	3. $a^2 - 100a + 2500$
4. Voeg honderdtallen en eenheden bij elkaar.	4. $100a - 2500 + a^2 - 100a + 2500 = a^2$

Nog een voorbeeld: 61^2.

$61 - 50 = 11$. Tel dit op bij 25, dit geeft 36 honderdtallen (3600). Dan berekenen we $11^2 = 121$. We vinden dus $61^2 = 3600 + 121 = 3721$.

Opgave 40 Bereken enkele kwadraten van getallen tussen 25 en 50 op deze manier.

Snel berekenen van kwadraten tussen 25 en 50

Voorbeeld: 36^2.

Neem het verschil van 50 en 36. Dat is 14. Trek 14 af van 25, dat is 11. Bereken 14^2, dat is 196. Het antwoord is dan 1296.

Algemeen: a^2 (a tussen 25 en 50)

1. Bereken het verschil van 50 en het getal a.	1. $50 - a$
2. Trek dit verschil af van 25 → honderdtallen.	2. $25 - (50 - a) = a - 25 \rightarrow 100(a - 25)$
3. Bereken $(50 - a)^2$ → eenheden.	3. $2500 - 100a + a^2$
4. Voeg honderdtallen en eenheden bij elkaar.	4. $100a - 2500 + 2500 - 100a + a^2 = a^2$

Opgave 41 Bereken enkele kwadraten van getallen tussen 50 en 75 op deze manier.

Snel vermenigvuldigen van twee getallen in de buurt van 100

Voorbeeld: 93×95, we schrijven de getallen eerst even onder elkaar.

93	1. Trek 93 van 100 af → 7.
95	2. Trek 95 van 100 af → 5.
	3. Trek nu 7 af van 95 (geeft 88) of 5 van 93 (geeft ook 88).
	4. Vermenigvuldig 7 en 5 → 35.
	5. Plaats het antwoord achter het antwoord van stap 3→ 8836.

Kortweg:

93	7	$(7 = 100 - 93)$
95	5	$(5 = 100 - 95)$
88	35	$(88 = 93 - 5 = 95 - 7, 35 = 7 \cdot 5)$

Voorbeeld: 99×96.

99	1	$(1 = 100 - 99)$
96	4	$(4 = 100 - 96)$
95	04	$(95 = 99 - 4 = 96 - 1, 4 = 1 \cdot 4)$

Het lukt ook als de getallen in de buurt liggen van 1000, 10.000, etc.

991	9	$(9 = 1000 - 991)$
983	17	$(17 = 1000 - 983)$
974	153	$(974 = 991 - 17 = 983 - 9, 153 = 9 \cdot 17)$

Voor getallen a en b kleiner dan 100 wordt het algemene schema dus:

$$\begin{array}{c|r} a & 100-a \\ b & 100-b \\ \hline a-100+b & (100-a)(100-b) \end{array}$$

We moeten laten zien dat deze handelingen het product ab van de getallen a en b opleveren. Nu is het resultaat een getal met $a - 100 + b$ honderdtallen en $(100 - a)(100 - b)$ eenheden. Dat wil zeggen

$$\begin{aligned} &100(a+b-100)+(100-a)(100-b) \\ &= \quad 100a+100b-10000+10000-100b-100a+ab \\ &= ab. \end{aligned}$$

Klopt!

Je kunt ook getallen nemen boven 100, 1000, etc.

$$\begin{array}{r|rl} 105 & 5 & \quad (5 = 105 - 100) \\ 103 & 3 & \quad (3 = 103 - 100) \\ \hline 108 & 15 & \quad (108 = 105 + 3 = 103 + 5, 15 = 5 \cdot 3) \end{array}$$

Opgave 42 Bereken enkele producten van twee getallen in de buurt van 100 op deze manier.

6.5 Gemengde opgaven

Opgave 43 ZAKGELD

Mauro krijgt een bepaald bedrag per maand als zakgeld. Als je zijn zakgeld neemt en dan nog eens zijn zakgeld en dan nog de helft van zijn zakgeld en dan nog 1,25 Euro erbij, dan kom je uit op 26,75 Euro. Hoeveel zakgeld krijgt Mauro per maand?

Hint: Een plaatje van een zak geld kan helpen om de gedachten te bepalen. Schrijf de bovenstaande zin op als een optelling gebruikmakend van een zak geld.

Opgave 44 LEEFTIJD EN SCHOENMAAT

Voorschrift	Voorbeeld
1. Vermenigvuldig je leeftijd (in gehelen) met 4.	1. $4 \cdot 53$
2. Tel bij het vorige antwoord 10 op.	2. $212 + 10 = 222$
3. Vermenigvuldig het vorige antwoord met 25.	3. $25 \cdot 222 = 5550$
4. Trek van het vorige antwoord het aantal dagen van een 'gewoon jaar' af.	4. $5550 - 365 = 5185$
5. Tel bij het vorige antwoord je schoenmaat (in gehelen) op.	5. $5185+38=5223$
6. Tel tenslotte bij het vorige antwoord 115 op.	6. $5223+115=5338$
7. Je eindantwoord is nu een getal van 3 of 4 cijfers waarvan de laatste twee precies je schoenmaat zijn en de overige cijfers precies je leeftijd.	7. leeftijd 53, schoenmaat 38

Als je dus van iemand alleen het eindantwoord weet (ervan uitgaand dat dat deze de berekeningen goed heeft uitgevoerd), dan weet je meteen diens leeftijd en schoenmaat. Hoe en waarom werkt deze truc?

Hint: Noem iemands leeftijd L en zijn schoenmaat S en voer daarmee alle handelingen precies uit (zie voorbeeld).

Opgave 45 CIJFERS EN GETALLEN 1

Voorschrift	Voorbeeld:
1. Schrijf een getal van drie cijfers op.	1. **1**48
2. Verplaats het eerste cijfer van het getal naar achteren en de rest naar voren.	2. 48**1**
3. Verplaats het eerste cijfer van het nieuwe getal weer naar achteren en de rest naar voren.	3. 81**4**
4. Tel de drie getallen nu op.	4. 1443
5. De som is nu altijd deelbaar door 37.	5. 1443 : 37 = 39

Hoe en waarom werkt deze truc?

Hint: Stel je noemt de *cijfers* van het begingetal a, b, en c. Dus het begingetal is $\langle abc \rangle$. Ga weer na wat er in elke stap gebeurt als je de aanwijzingen uitvoert op $\langle abc \rangle$.

Opgave 46 ZWERM SPREEUWEN

Twee jongens staan op een heuvel als een grote zwerm spreeuwen voorbij vliegt. De eerste zegt dat er 100 vogels in de zwerm zitten. Onzin zegt de tweede: er zouden er nóg eens zoveel moeten zijn als er in werkelijkheid zijn en dan nog eens half zoveel en dan nog eens een vierde zoveel en dan zelfs nog één meer, voordat er 100 vogels zijn. Hoeveel vogels bevat deze zwerm?

Opgave 47 CIJFERS EN GETALLEN 2

Voorschrift	Voorbeeld:
1. Schrijf een getal van drie cijfers op.	1. 148
2. Tel de cijfers van het getal bij elkaar op.	2. 1 + 4 + 8 = 13
3. Trek de uitkomst van 2. af van het getal.	3. 148 − 13 = 135
4. De uitkomst is nu altijd deelbaaar door 9.	4. 135 : 9 = 15

Hoe en waarom werkt deze truc?

Opgave 48 CIJFERS EN GETALLEN 3

Voorschrift	Voorbeeld:
1. Schrijf een getal van drie cijfers op, zeg $\langle abc \rangle$ met $a > c$.	1. 481
2. Doe: $\langle abc \rangle - \langle cba \rangle$.	2. 481 − 184 = 297
3. De uitkomst zit altijd in de tafel van 99.	3. 297 : 99 = 3

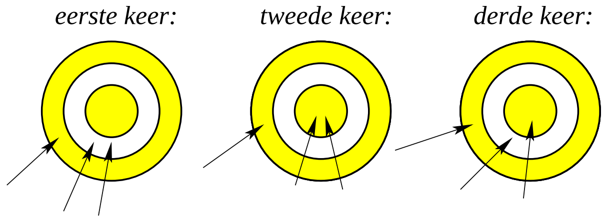
Hoe en waarom werkt deze truc?

Opgave 49 Cijfers en Getallen 4

Voorschrift	Voorbeeld:
1. Schrijf een getal van drie cijfers op.	1. **841**
2. Verwissel het eerste en het derde cijfer van het getal.	2. **148**
3. Trek de kleinste uitkomst van de grootste af.	3. 841 − 148 = 693
4. Verwissel het eerste en het derde cijfer van de uitkomst.	4. 396
5. Tel de uitkomsten van 3 en 4 bij elkaar op.	5. 693 + 396 = 1089
De uitkomst is altijd 1089.	

Hoe en waarom werkt deze truc?

Opgave 50 *(Kangoeroe 2003)* Minoes heeft drie keer 3 pijlen op een schijf geworpen. Ze scoorde de eerste keer 29 punten en de tweede keer 43 punten. Hoeveel punten scoorde ze de derde keer?



A) 32 B) 34 C) 36 D) 38 E) 40

Opgave 51 *(Kangoeroe 2003)* In een kruik gaat evenveel wijn als in een fles en een glas samen. In een fles gaat evenveel wijn als in een glas en een kan samen. In drie kannen gaat evenveel als in twee kruiken samen. Hoeveel glazen gaan er in een kan?

A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Opgave 52 *(Kangoeroe 2003)* Er zijn in een reservaat twee soorten draken: rode en groene. Iedere rode draak heeft 3 koppen en twee staarten. Iedere groene draak heeft 3 koppen en 4 staarten. Alle draken samen hebben 60 koppen en 62 staarten. Hoeveel rode draken leven er in het reservaat?

A) 6 B) 7 C) 8 D) 9 E) 10

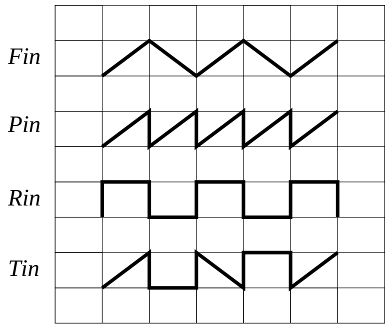
Opgave 53 *(Kangoeroe 2004)* Vier kangoeroes Fin, Pin, Rin en Tin springen over een plein van allemaal gelijke, rechthoekige tegels. Hun routes zie je hieronder.

Fin sprong 25 m.

Pin sprong 37 m.

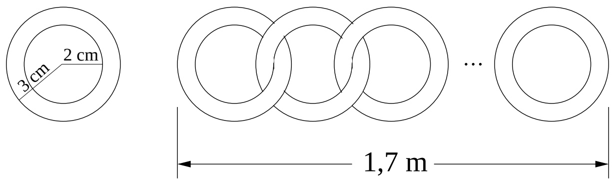
Rin sprong 38 m.

Hoeveel meter sprong Tin?



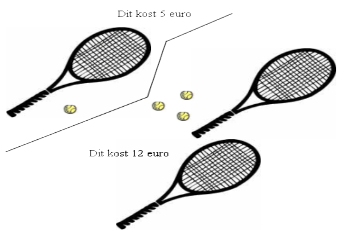
A) 27 B) 30 C) 35 D) 36 E) 40

Opgave 54 *(Kangoeroe 2004)* Een aantal ringen wordt geschakeld tot een ketting als in de figuur. De totale lengte van de ketting is 1,7 meter. Uit hoeveel ringen bestaat de ketting?



A) 17 B) 21 C) 30 D) 42 E) 85

Opgave 55 *(Kangoeroe 2006)*



Hoeveel euro kost een bal?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Opgave 56 *(Kangoeroe 2006)* Grootmoeder heeft koekjes voor haar kleinkinderen gebakken. Als zij ieder twee koekjes geeft, dan houdt zij drie koekjes over. Als zij ieder drie koekjes wilt geven, dan heeft ze er twee te kort. Hoeveel kleinkinderen heeft grootmoeder?

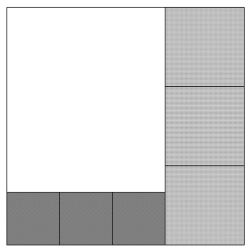
A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

Opgave 57 *(Kangoeroe 2006)* Drie soorten Marsmannetjes vliegen per raket naar de maan. Groene Marsmannetjes hebben twee tentakels, oranje mannetjes hebben drie tentakels en blauwe mannetjes hebben vijf tentakels. In de raket zijn evenveel groene als oranje Marsmannetjes en er zijn 10 blauwe mannetjes meer dan groene. Samen hebben de Marsmannetjes 250 tentakels. Hoeveel blauwe Marsmannetjes vliegen er mee in de raket?

A) 15 B) 20 C) 25 D) 30 E) 40

Opgave 58 *(Kangoeroe 2006)*

Een rechthoek is verdeeld in 7 vierkanten.
De zijden van de lichtgrijze vierkanten aan de rechterkant hebben allemaal lengte 8.
Hoe lang zijn de zijden van het grote witte vierkant?



A) 15 B) 16 C) 18 D) 20 E) Dat kun je niet weten

Opgave 59 *(Kangoeroe 2006)* Een getal van drie cijfers eindigt op het cijfer 2. Als we deze 2 vooraan zetten, dan krijgen we een getal van drie cijfers dat 36 kleiner is. Wat is de som van de cijfers van dat getal?

A) 4 B) 5 C) 7 D) 9 E) 10

Opgave 60 *(Kangoeroe 2006)* $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots. + 2005^2 - 1 \times 3 - 2 \times 4 - 3 \times 5 - \ldots. - 2004 \times 2006 =$

A) 0 B) 2000 C) 2004 D) 2005 E) 2006

Index